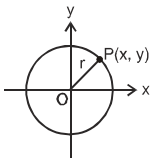
CIRCLE

Four circles to the kissing come, The smaller are the benter. The bend is just the inverse of The distance from the centre. Through their intrigue left Euclid dumb There's now no need for rule of thumb. Since zero bend's a dead straight line And concave bends have minus sign, The sum of squares of all four bends Is half the square of their sum. ..... Soddy, Frederick

A circle is a locus of a point in a plane whose distance from a fixed point (called centre) is always constant (called radius).

Equation of a circle in various forms :

(a) The circle with centre as origin & radius 'r' has the equation; $x^2 + y^2 = r^2$.



(b) The circle with centre (h, k) & radius 'r' has the equation; $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(c) The general equation of a circle is $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

with centre as $(-g, -f)$ & radius $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

This can be obtained from the equation $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Take $-h = g$, $-k = f$ and $h^2 + k^2 - r^2 = c$

Condition to define circle :-

$g^2 + f^2 - c > 0$ $\Rightarrow$ real circle.

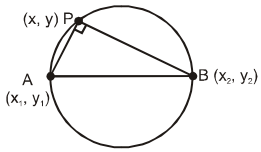
$g^2 + f^2 - c = 0$ $\Rightarrow$ point circle.

$g^2 + f^2 - c < 0$ $\Rightarrow$ imaginary circle, with real centre, that is $(-g, -f)$

Note : That every second degree equation in x & y, in which coefficient of x^2 is equal to coefficient of y^2 & the coefficient of xy is zero, always represents a circle.

(d) The equation of circle with (x_1, y_1) & (x_2, y_2) as extremeties of its diameter is:

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.



This is obtained by the fact that angle in a semicircle is a right angle.

$\therefore$ (Slope of PA) (Slope of PB) = – 1

$\Rightarrow \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \dfrac{y - y_2}{x - x_2} = -1 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

Note that this will be the circle of least radius passing through (x_1, y_1) & (x_2, y_2).

Example # 1 Find the equation of the circle whose centre is (0, 3) and radius is 3.

Solution. The equation of the circle is $(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 6y = 0$

Example # 2 Find the equation of the circle which passes through(1, –1) and two of its dimeter are $x + 2y - 5 = 0$ and $x - y + 1 = 0$

Solution. Let P be the point of intersection of the lines

$x + 2y - 5 = 0$ .....(i)

and $x - y + 1 = 0$ .....(ii)

Solving (i) and (ii), we get x = 1, y = 2. So, coordinates of centre are (1, 2). since circle passes through (1,–1) so

radius = $\sqrt{(1-1)^2+(2+1)^2}$ $\Rightarrow$ radius = 3

Hence the equation of the required circle is $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

Example # 3 If the equation $ax^2 + (b-3)xy + 3y^2 + 6ax + 2by - 3 = 0$ represents the equation of a circle then find a, b

Solution. $ax^2 + (b-3)xy + 3y^2 + 6ax + 2by - 3 = 0$

above equation will represent a circle if

coefficient of x^2 = coefficient of y^2

a = 3

coefficient of xy = 0

b = 3

Example # 4 Find the equation of a circle whose diametric end points are (x_1, y_1) and (x_2, y_2) where x_1, x_2 are the roots of $x^2 - ax + b = 0$ and y_1, y_2 are the roots of $y^2 - by + a = 0$.

Solution. We know that the equation of the circle described on the line segment joining (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as a diameter is $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$.

$x^2 + y^2 - (x_1+x_2)x - (y_1+y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Here, $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b$

$y_1 + y_2 = b$, $y_1y_2 = a$

So, the equation of the required circle is

$x^2 + y^2 - ax - by + a + b = 0$

Self practice problems :

(1) Find the equation of the circle passing through the point of intersection of the lines x + 3y = 0and 2x – 7y = 0 and whose centre is the point of intersection of the lines x + y + 1 = 0 and x – 2y + 4 = 0.

(2) Find the equation of the circle whose centre is (1, 2) and which passes through the point (4, 6)

(3) Find the equation of a circle whose radius is 6 and the centre is at the origin.

Answers :

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ (2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ (3) $x^2 + y^2 = 36$.

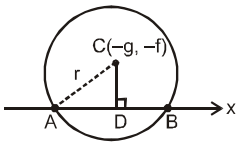
Intercepts made by a circle on the axes:

The intercepts made by the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ on the co–ordinate axes are $2\sqrt{g^2-c}$ (on x-axis) & $2\sqrt{f^2-c}$ (on y-axis) respectively.

If $g^2 > c$ $\Rightarrow$ circle cuts the x axis at two distinct points.

$g^2 = c$ $\Rightarrow$ circle touches the x–axis.

$g^2 < c$ $\Rightarrow$ circle lies completely above or below the x–axis.



$AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - CD^2} = 2\sqrt{r^2 - f^2} = 2\sqrt{g^2 + f^2 - c - f^2} = 2\sqrt{g^2 - c}$

Example # 5 Find the locus of the centre of the circle whose x and y intercepts are a and b respectively.

Solution. Equation of circle is $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

x intercept = a

$2\sqrt{g^2 - c} = a$ $\quad g^2 - c = \dfrac{a^2}{4}$ ..... (i)

y intercept = b

$2\sqrt{f^2 - c} = b$ $\quad f^2 - c = \dfrac{b^2}{4}$ ..... (ii)

subtracting equation (i) and (ii)

$g^2 - f^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$

hence locus of centre is $x^2 - y^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$

Self practice problems :

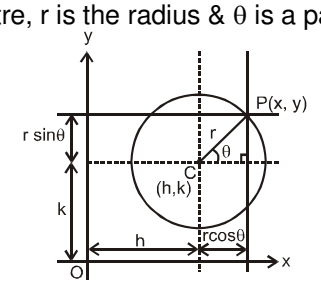
(4) Find the equation of a circle which touches the positive axis of y at a distance 3 from the origin and intercepts a distance 6 on the axis of x.

(5) Find the equation of a circle which touches positive y-axis at a distance of 2 units from the origin and cuts an intercept of 3 units with the positive direction of x-axis.

Answers : (4) $x^2 + y^2 \pm 6\sqrt{2}\ x - 6y + 9 = 0$ (5) $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$

Parametric equations of a circle:

The parametric equations of $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ are: $x = h + r\cos\theta$; $y = k + r\sin\theta$; $-\pi < \theta \le \pi$ where (h, k) is the centre, r is the radius & θ is a parameter.



Example # 6 Find the parametric equations of the circle $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Solution. We have : $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$

So, the parametric equations of this circle are

$x = -2 + 2\cos\theta$, $y = -3 + 2\sin\theta$.

Example # 7 Find the equation of the following curve in cartesian form

$x + y = \cos\theta$, $x - y = \sin\theta$ where θ is the parameter.

Solution. We have : $x + y = \cos\theta$ ..... (i)

$x - y = \sin\theta$ ..... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$\Rightarrow \quad (x + y)^2 + (x - y)^2 = 1$

$x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$

Clearly, it is a circle with centre at (0, 0) and radius $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Self practice problems :

(6) Find the parametric equations of circle $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

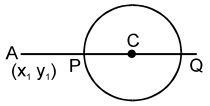
(7) Find the cartesian equations of the curve $x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$, $y = 2 - \sqrt{2}\sin\theta$

Answers : (6) $x = 3 + 5\cos\theta$, $y = -2 + 5\sin\theta$ (7) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

Position of a point with respect to a circle:

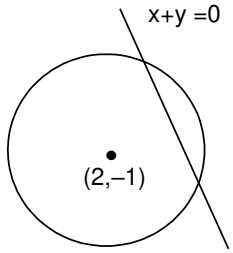
The point (x_1, y_1) is inside, on or outside the circle $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
according as $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c <, = \text{ or } > 0$.

Note : The greatest & the least distance of a point A (lies outside the circle) from a circle with centre C & radius r is AC + r & AC – r respectively.



Example # 8 Check whether the point (1, 2) lies in smaller or larger region made by circle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ and the line $x + y = 0$

Solution : We have $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ or $S = 0$,



where $S = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11$.
For the point (1, 2), we have $S_1 = 1^2 + 2^2 - 4 \times 1 + 2 \times 2 - 11 < 0$
Hence, the point (1, 2) lies inside the circle
Points (1,2) and (2, –1) lie on same side of the line $x + y = 0$
Hence the point (1,2) lies in the larger region.

Self practice problem :

(8) How are the points (0, 1) (3, 1) and (1, 3) situated with respect to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$?

Answer : (8) (0, 1) lies on the circle ; (3, 1) lies outside the circle ; (1, 3) lies inside the circle.

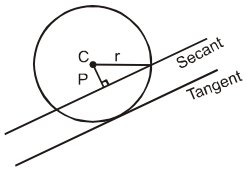
Line and a circle:

Let L = 0 be a line & S = 0 be a circle. If r is the radius of the circle & p is the length of the perpendicular from the centre on the line, then:

(i) $p > r \Leftrightarrow$ the line does not meet the circle i. e. passes out side the circle.
(ii) $p = r \Leftrightarrow$ the line touches the circle. (It is tangent to the circle)
(iii) $p < r \Leftrightarrow$ the line is a secant of the circle.
(iv) $p = 0 \Rightarrow$ the line is a diameter of the circle.

Also, if $y = mx + c$ is line and $x^2 + y^2 = a^2$ is circle then

(i) $c^2 < a^2 (1 + m^2) \Leftrightarrow$ the line is a secant of the circle.
(ii) $c^2 = a^2 (1 + m^2) \Leftrightarrow$ the line touches the circle. (It is tangent to the circle)
(iii) $c^2 > a^2 (1 + m^2) \Leftrightarrow$ the line does not meet the circle i. e. passes out side the circle.



These conditions can also be obtained by solving $y = mx + c$ with $x^2 + y^2 = a^2$ and making the discriminant of the quadratic greater than zero for secant, equal to zero for tangent and less the zero for the last case.

Example # 9 For what value of λ, does the line $x + y = \lambda$ touch the circle $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

Solution. We have : $x + y = \lambda$ .....(i) and $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$..... (ii)

If the line (i) touches the circle (ii), then

length of the $\perp$ from the centre (1, 1) = radius of circle (ii)

$$\Rightarrow \left| \frac{1+1-\lambda}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow |2-\lambda| = 2 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ or } 4$$

Hence, the line (i) touches the circle (ii) for $\lambda = 0$ or 4

Self practice problem :

(9) Find the range of values of m for which the line $y = mx + 2$ cuts the circle $x^2 + y^2 = 1$ at distinct points

Answers : (9) $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Slope form of tangent :

$y = mx + c$ is always a tangent to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ if $c^2 = a^2(1 + m^2)$. Hence, of tangent is $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ and the point of contact is $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$.

Point form of tangent :

(i) The equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ at its point (x_1, y_1) is, $x x_1 + y y_1 = a^2$.

(ii) The equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ at its point (x_1, y_1) is : $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$.

Note : In general the equation of tangent to any second degree curve at point (x_1, y_1) on it can be obtained by replacing x^2 by $x x_1$, y^2 by yy_1, x by $\frac{x + x_1}{2}$, y by $\frac{y + y_1}{2}$,

xy by $\frac{x_1y + xy_1}{2}$ and c remains as c.

Parametric form of tangent :

The equation of a tangent to circle $x^2 + y^2 = a^2$ at $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ is $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$.

NOTE : The point of intersection of the tangents at the points $P(\alpha)$ & $Q(\beta)$ is $\left(\frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}, \frac{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$

Example # 10 Find the equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$ at (3, 4).

Solution. Equation of tangent is

$$3x + 4y - 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 2\left(\frac{y+4}{2}\right) - 11 = 0$$

or $2x + 3y - 18 = 0$

Hence, the required equation of the tangent is $2x + 3y - 18 = 0$

Example # 11 Find the equation of tangents to the circle $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ which are perpendicular to the line $x + 2y + 4 = 0$

Solution. Given circle is $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ .....(i)

and given line is $x + 2y + 4 = 0$ .....(ii)

Centre of circle (i) is (2,–1)) and its radius $\sqrt{5}$ is Equation of any line

$2x - y + k = 0$ perpendicular to the line (ii) .....(iii)

If line (iii) is tangent to circle (i) then

$$\frac{|4+1+k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{or} \quad |k + 5| = 5 \quad \text{or} \quad k = 0, -10$$

Hence equation of required tangents are $2x - y = 0$ and $2x - y - 10 = 0$

Self practice problem :

(10) Find the equation of the tangents to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ which are
(i) parallel,
(ii) perpendicular to the line $3x - 4y - 1 = 0$

Answer.
(10) (i) $3x - 4y + 20 = 0$ and $3x - 4y - 10 = 0$ (ii) $4x + 3y + 5 = 0$ and $4x + 3y - 25 = 0$

Normal :

If a line is normal / orthogonal to a circle, then it must pass through the centre of the circle. Using this fact normal to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ at (x_1, y_1) is; $y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$.

Example # 12 Two normals of a circle are $2x + 3y = 5$ and $3x - 4y + 1 = 0$. Find its equation having radius 2

Solution. Since point of intersection of normals is the centre of the circle
point of intersection of lines $2x + 3y = 5$ and $3x - 4y + 1 = 0$ is (1,1)
equation of circle having centre (1,1) and radius 2 is
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

Self practice problem :

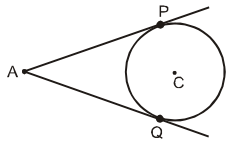
(11) Find the equation of the normal to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ at the point (2, 3).

Answer : (11) $x - y + 1 = 0$

Pair of tangents from a point :

The equation of a pair of tangents drawn from the point A (x_1, y_1) to the circle
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is : $SS_1 = T^2$.

Where $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$; $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$
$T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$.



Example # 13 Find the equation of the pair of tangents drawn to the circle $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ from thepoint (2, 1)

Solution. Given circle is $S = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
Let $P \equiv (2, 1)$
For point P, $S_1 = 16$
Clearly P lies outside the circle
and $T \equiv 2x + y + 2(x + 2) - 3(y + 1) + 9 = 0$
i.e $T \equiv 2(2x - y + 5)$
Now equation of pair of tangents from P(2, 1) to circle (1) is $SS_1 = T^2$
or $16(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9) = 4(2x - y + 5)^2$ or $12y^2 - 16x - 56y + 16xy + 44 = 0$
or $3y^2 - 4x - 14y + 4xy + 11 = 0$

Self practice problems :

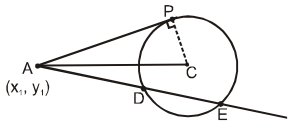
(12) Find the joint equation of the tangents through (7, 1) to the circle $x^2 + y^2 = 25$.

Answer : (12) $12x^2 - 12y^2 + 7xy - 175x - 25y + 625 = 0$

Length of a tangent and power of a point :

The length of a tangent from an external point (x_1, y_1) to the circle

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is given by $L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2f_1 y + c} = \sqrt{S_1}$.



AP = length of tangent

$AP^2 = AD \cdot AE$

Square of length of the tangent from the point A is also called the power of point w.r.t. a circle.
Power of a point w.r.t. a circle remains constant.
Power of a point P is positive, negative or zero according as the point 'A' is outside, inside or on the circle respectively.

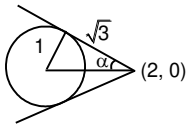
Example # 14 Find the angle between the tangents drawn from the point (2, 0) to the circle $x^2 + y^2 = 1$

Solution. Given circle is $x^2 + y^2 = 1$ .....(i)

Given point is (2, 0).

Now length of the tangent from (2, 0) to circle (i) = $\sqrt{2^2 + 0^2 - 1} = \sqrt{3}$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

so angle between tangents = $2\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Self practice problems :

(13) The lenght of tangents from P(1, –1) & Q(3, 3) to a circle are $\sqrt{2}$ and $\sqrt{6}$ respectively. Then find the lenght of tangent from R (– 1, – 5) to the same circle.

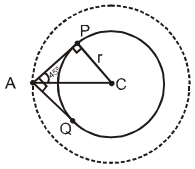
(14) Find the lenght of tangent drawn from any point on circle $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ to the circle $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$.

Answer. (13) $\sqrt{38}$ (14) $\sqrt{7}$

Director circle :

The locus of the point of intersection of two perpendicular tangents is called the director circle of the given circle. The director circle of a circle is the concentric circle having radius equal to times the original circle.

Proof :



AC = r cosec 45º = $r\sqrt{2}$

Example # 15 Find the equation of director circle of the circle $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$

Solution : Centre & radius of given circle are (–3, –4) & $\sqrt{27}$ respectively.

Centre and radius of the director circle will be (–3, –4) & $\sqrt{27}.\sqrt{2} = \sqrt{54}$ respectively.

$\therefore$ equation of director circle is $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 54$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 29 = 0$

Self practice problems :

(15) Find the angle between the tangents drawn from $(5, \sqrt{7})$ to the circle $x^2+y^2=16$

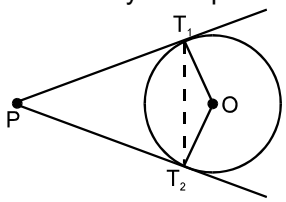
Answer (15) $\frac{\pi}{2}$

Chord of contact :

If two tangents PT_1 & PT_2 are drawn from the point $P(x_1, y_1)$ to the circle $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, then the equation of the chord of contact T_1T_2 is:
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$.

Note : Here R = radius; L = length of tangent.

(a) Chord of contact exists only if the point 'P' is not inside.



(b) Length of chord of contact $T_1T_2 = \frac{2LR}{\sqrt{R^2 + L^2}}$.

(c) Area of the triangle formed by the pair of the tangents & its chord of contact $= \frac{RL^3}{R^2 + L^2}$

(d) Tangent of the angle between the pair of tangents from $(x_1, y_1) = \left(\frac{2RL}{L^2 - R^2}\right)$

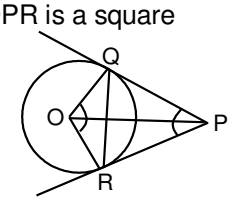
(e) Equation of the circle circumscribing the triangle PT_1T_2 is:
$(x - x_1)(x + g) + (y - y_1)(y + f) = 0$.

Example # 16 Find the equation of the chord of contact of the tangents drawn from (0, 1) to the circle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

Solution. Given circle is $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ .....(i)
Let P = (0, 1)
For point P (0, 1), $T = x \cdot 0 + y \cdot 1 - (x + 0) + 2(y + 1)$
i.e. $T = x - 3y - 2$
Now equation of the chord of contact of point P(0, 1) w.r.t. circle (i) will be
$x - 3y - 2 = 0$

Example # 17 If the chord of contact of the tangents drawn from (α, β) to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ subtends right angle at the centre then prove that $\alpha^2 + \beta^2 = 2a^2$.

Solution. $\angle QOR = \angle QPR = \frac{\pi}{2}$
so OQPR is a square



$OQ^2 = PQ^2$
$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2$
$\alpha^2 + \beta^2 = 2a^2$

Self practice problems :

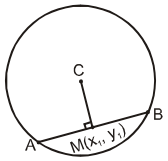
(16) Find the co-ordinates of the point of intersection of tangents at the points where the line $x - 2y + 1 = 0$ meets the circle $x^2 + y^2 = 25$

(17) If the chord of contact of the tangetns drawn from a point on circle $x^2 + y^2 = a^2$ to another circle $x^2 + y^2 = b^2$ touches the circle $x^2 + y^2 = c^2$ then prove that a,b,c are in G.P.

Answers : (16) (–25, 50) (17) $\frac{405\sqrt{3}}{52}$ sq. unit ; $4x + 6y - 25 = 0$

Equation of the chord with a given middle point:

The equation of the chord of the circle $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ in terms of its mid point $M(x_1, y_1)$ is $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ which is designated by $T = S_1$.



Notes : (i) The shortest chord of a circle passing through a point 'M' inside the circle is one chord whose middle point is M.

(ii) The chord passing through a point ' M ' inside the circle and which is at a maximum distance from the centre is a chord with middle point M.

Example # 18 Find the equation of the chord of the circle $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$, whose middle point is (0, 0)

Solution. Equation of given circle is $S \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$

Let $L \equiv (0, 0)$

For point L(0, 0), $S_1 = -4$ and

$T \equiv x.0 + y(0) + (x + 0) - (y + 0) - 4$ i.e. $T \equiv x - y - 4$

Now equation of the chord of circle (i) whose middle point is L(0, 0) is

$T = S_1$ or $x - y = 0$

Second Method : Let C be the centre of the given circle, then $C \equiv (-1, 1)$. $L \equiv (0, 0)$ slope of CL = –1

$\therefore$ Equation of chord of circle whose middle point is L, is $y - 0 = 1(x - 0)$

($\because$ chord is perpendicular to CL) or $x - y = 0$

Self practice problems :

(18) Find the equation of that chord of the circle $x^2 + y^2 = 15$, which is bisected at (3, 2)

(19) A variable chord is drawn through the origin to the circle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Find the locus of the centre of the circle drawn on this chord as diameter.

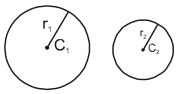
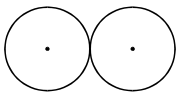
Answers : (18) $3x + 2y - 13 = 0$ (19) $x^2 + y^2 - ax = 0$

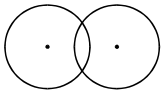
Equation of the chord joining two points of circle :

The equation of chord PQ to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ joining two points $P(\alpha)$ and $Q(\beta)$ on it is given by the equation of a straight line joining two point α & β on the circle $x^2 + y^2 = a^2$ is

$$x \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = a \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Common tangents to two circles:

	Case	Number of Tangents	Condition
(i)		4 common tangents (2 direct and 2 transverse)	$r_1 + r_2 < c_1 c_2$.
(ii)		3 common tangents.	$r_1 + r_2 = c_1 c_2$.

(iii)  2 common tangents. $|r_1 - r_2| < c_1 c_2 < r_1 + r_2$

(iv) 1 common tangent. $|r_1 - r_2| = c_1 c_2$.

(v) No common tangent. $c_1 c_2 < |r_1 - r_2|$.

(Here C_1C_2 is distance between centres of two circles.)

Notes : (i) The direct common tangents meet at a point which divides the line joining centre of circles externally in the ratio of their radii.
Transverse common tangents meet at a point which divides the line joining centre of circles internally in the ratio of their radii.

(ii) Length of an external (or direct) common tangent & internal (or transverse) common tangent to the two circles are given by:
$L_{ext} = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ & $L_{int} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$, where d = distance between the centres of the two circles and r_1, r_2 are the radii of the two circles. Note that length of internal common tangent is always less than the length of the external or direct common tangent.

Example # 19 Examine if the two circles $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ intersect or not

Solution. Given circles are $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ .....(i)
and $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ .....(ii)
Let A and B be the centres and r_1 and r_2 the radii of circles (i) and (ii) respectively, then
$A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (5, 3)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$
Now AB = 3 and $r_1 + r_2 = 6$, $|r_1 - r_2| = 2$
Thus $|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2$, hence the two circles intersect.

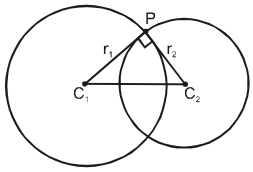
Self practice problems :

(20) Find the position of the circles $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 20 = 0$ and $x^2 + y^2 + 14x - 6y + 22 = 0$ with respect to each other.

Answer : (20) touch externally

Orthogonality of two circles:

Two circles $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ are said to be orthogonal or said to intersect orthogonally if the tangents at their point of intersection include a right angle. The condition for two circles to be orthogonal is:
$2 g_1 g_2 + 2 f_1 f_2 = c_1 + c_2$.
Proof :
$(C_1C_2)^2 = (C_1P)^2 + (C_2P)^2$
$\Rightarrow$ $(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$
$\Rightarrow$ $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$



Notes :

(a) The centre of a variable circle orthogonal to two fixed circles lies on the radical axis of two circles.

(b) If two circles are orthogonal, then the polar of a point 'P' on first circle w.r.t. the second circle passes through the point Q which is the other end of the diameter through P. Hence locus of a point which moves such that its polars w.r.t. the circles $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ & $S_3 = 0$ are concurrent in a circle which is orthogonal to all the three circles.

(c) The centre of a circle which is orthogonal to three given circles is the radical centre provided the radical centre lies outside all the three circles.

Example # 20 If the circles $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ and $2x^2 + 2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ are orthogonal to each other then prove that $g_1g_2 + f_1f_2 = c_1 + \frac{c_2}{2}$

Solution. Given circles are $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ .....(i)

and $2x^2 + 2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

or $x^2 + y^2 + g_2x + f_2y + \frac{c_2}{2} = 0$ .....(ii)

Since circles (i) and (ii) cut orthogonally

$\therefore \quad 2g_1\left(\frac{g_2}{2}\right) + 2f_1\left(\frac{f_2}{2}\right) = c_1 + \frac{c_2}{2}$

$g_1g_2 + f_1f_2 = c_1 + \frac{c_2}{2}$

Self practice problems :

(21) For what value of λ the circles $x^2 + y^2 + 8x + 3y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 + 2x - y - \lambda = 0$ cut orthogonally.

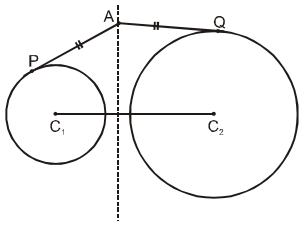
(22) Find the equation to the circle which passes through the origin and has its centre on the line $x - y = 0$ and cuts the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ orthogonally.

Answer : (21) $\frac{5}{2}$ (22) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

Radical axis and radical centre:

The radical axis of two circles is the locus of points whose powers w.r.t. the two circles are equal. The equation of radical axis of the two circles $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ is given by

$S_1 - S_2 = 0$ i.e. $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$.



The common point of intersection of the radical axes of three circles taken two at a time is called the radical centre of three circles. Note that the length of tangents from radical centre to the three circles are equal.

Notes :

(a) If two circles intersect, then the radical axis is the common chord of the two circles.

(b) If two circles touch each other, then the radical axis is the common tangent of the two circlesat the common point of contact.

(c) Radical axis is always perpendicular to the line joining the centres of the two circles.

(d) Radical axis will pass through the mid point of the line joining the centres of the two circles only if the two circles have equal radii.

(e) Radical axis bisects a common tangent between the two circles.

(f) A system of circles, every two which have the same radical axis, is called a coaxial system.

(g) Pairs of circles which do not have radical axis are concentric.

Example # 21 Find the co-ordinates of the point from which the lengths of the tangents to the following three circles be equal.

$x^2 + y^2 = 1$
$x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$
$x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$

Solution : Here we have to find the radical centre of the three circles. First reduce them to standard form in which coefficients of x^2 and y^2 be each unity. Subtracting in pairs the three radical axes are

$x = 2$; $8x + 10y + 9 = 0$
$10y + 25 = 0$

solving any two, we get the point $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ which satisfies the third also. This point is called the radical centre and by definition the length of the tangents from it to the three circles are equal.

Self practice problem :

(23) Find the point from which the tangents to the three circles $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 + y = 0$ are equal in length. Find also this length.

Answer : (23) (2, – 1) ; 2.

Family of Circles:

This article is aimed at obtaining the equation of a group of circles having a specific characteristic. For example, the equation $x^2 + y^2 + 4x + 2y + \lambda = 0$ where λ is arbitrary, represents a family of circles with fixed centre (–2, –1) but variable radius. We have the following results for some other families of circles.

(a) The equation of the family of circles passing through the points of intersection of two circles $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ is : $S_1 + K S_2 = 0$
($K \neq -1$, provided the co–efficient of x^2 & y^2 in S_1 & S_2 are same)

(b) The equation of the family of circles passing through the point of intersection of a circle S = 0 & a line L = 0 is given by S + KL = 0.

(c) The equation of a family of circles passing through two given points (x_1, y_1) & (x_2, y_2) can be written in the form:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + K \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ where K is a parameter.}$$

(d) The equation of a family of circles touching a fixed line $y - y_1 = m(x - x_1)$ at the fixed point (x_1, y_1) is $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + K(y - y_1 - m(x - x_1)) = 0$, where K is a parameter.

(e) Family of circles circumscribing a triangle whose sides are given by $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ and $L_3 = 0$ is given by; $L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_3L_1 = 0$ provided co–efficient of xy = 0 and co–efficient of x^2 = co–efficient of y^2.

(f) Equation of circle circumscribing a quadrilateral whose side in order are represented by the lines $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ & $L_4 = 0$ are $u L_1L_3 + \lambda L_2L_4 = 0$ where values of u & λ can be found out by using condition that co–efficient of x^2 = co–efficient of y^2 and co–efficient of xy = 0.

Example # 22 Find the equation of the circle passing through the point (1, 1) and points of intersection of the circles $x^2 + y^2 + 13x - 3y = 0$ and $2x^2 + 2y^2 + 4x - 7y - 25 = 0$.

Solution. Any circle through the intersection of given circles is $S_1 + \lambda S_2 = 0$

or $x^2 + y^2 + 13x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 + 2x - 7y/2 - 25/2) = 0$

This circle passes through (1, 1)

$1 + 1 + 13 - 3 + \lambda(1 + 1 + 2 - 7/2 - 25/2) = 0$

$\lambda = 1$

Putting the value of λ in (i) the required circle is $4x^2 + 4y^2 + 30x - 13y - 25 = 0$

Example # 23 Find the equations of smallest circle which passes through the points of intersection of the line x + y = 1 and the circle $x^2 + y^2 = 9$.

Solution. The required circle by $S + \lambda L = 0$ is

$x^2 + y^2 - 9 + \lambda(x + y - 1) = 0$ ....(i)

centre $(-g, -f) = \left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$

centre lies on the line $x + y = 1$

$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 1$

$\lambda = -1$

Putting the value of λ in (i) the required circle is

$x^2 + y^2 - x - y - 8 = 0$

Example # 24 Find the equation of circle passing through the points A(1, 1) & B(0, 3) and whose radius is $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Solution. Equation of AB is $2x + y - 3 = 0$

$\therefore$ equation of circle is

$(x - 1)(x) + (y - 1)(y - 3) + \lambda(2x + y - 3)$

$= 0$ or $x^2 + y^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 4)y + 3 - 3\lambda = 0$

$$\sqrt{\left(\frac{2\lambda - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - 4}{2}\right) + 3\lambda - 3} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\lambda = 1$

$\therefore$ equation of circle is $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$

Example # 25 A variable circle always touhces $x + y = 2$ at (1, 1), cuts the circle $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$. Prove that all common chords pass through a fixed point. Also find the point.

Solution : Equation of circle is $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda(x + y - 2) = 0$

$x^2 + y^2 + x(\lambda - 2) + y(\lambda - 2) + 2 - 2\lambda = 0$

common chord of this circle with $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$ is

$(\lambda - 6)x + (\lambda - 7)y + 8 - 2\lambda = 0$

$\lambda(x + y - 2) + (-6x - 7y + 8) = 0$

this chord passes through the point of intersection of the lines $x + y - 2 = 0$ and $-6x - 7y + 8 = 0$ which is (6, –4)

Example # 26 Find the equation of circle circumcscribing the triangle whose sides are $3x - y - 12 = 0$,

$5x - 3y - 28 = 0$ & $x + y - 4 = 0$.

Solution : $L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_1L_3 = 0$

$(3x - y - 12)(5x - 3y - 28) + \lambda(5x - 3y - 28)(x + y - 4) + \mu(3x - y - 12)(x + y - 4) = 0$

coefficient of x^2 = coefficient of y^2

$\Rightarrow$ $5\lambda + 3\mu + 15 = 3 - 3\lambda - \mu$

$2\lambda + \mu + 3 = 0$ .....(ii)

coefficient of $xy = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda + \mu - 7 = 0$ .....(iii)

Solving (ii) and (iii), we have

$\lambda = -10, \mu = 17$

Puting these values of λ & μ in equation (i), we get $2x^2 + 2y^2 - 9x + 11y + 4 = 0$

Self practice problems :

(24) Find the equation of the circle passing through the points of intersection of the circles $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ and $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ and with its centre on the line $y = x$.

(25) Find the equation of circle circumscribing the quadrilateral whose sides are $x + y = 10$, $x - 7y + 50 = 0$, $22x - 4y + 125 = 0$ and $2x - 4y - 5$

Answers : (24) $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$

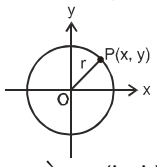
(25) $x^2 + y^2 = \frac{125}{2}$

वृत्त (Circle)

समतल में वृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव अचर रहती है। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र एवं अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते है।

वृत्त की समीकरण के विभिन्न रूप (Equation of a circle in various forms) :

(a) उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं त्रिज्या 'r' हो, $x^2 + y^2 = r^2$ होगा ।



(b) उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र (h, k) और त्रिज्या 'r' है, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ द्वारा दिया जाता है।

(c) वृत्त का व्यापक समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ होता है जिसका केन्द्र $(-g, -f)$ और त्रिज्या होती हैं।

यह समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ से प्राप्त किया जा सकता हैं।

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

$-h = g, -k = f$ तथा $h^2 + k^2 - r^2 = c$ लेने पर

वृत्त को परिभाषित करने का प्रतिबन्ध

$g^2 + f^2 - c > 0$ $\Rightarrow$ वास्तविक वृत्त

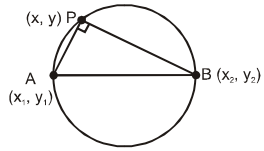
$g^2 + f^2 - c = 0$ $\Rightarrow$ बिन्दु वृत्त

$g^2 + f^2 - c < 0$ $\Rightarrow$ काल्पनिक वृत्त जिसका केन्द्र $(-g, -f)$ वास्तविक होता हैं।

नोट : x , y के पदों दो घात का समीकरण जिसमें x^2 और y^2 के गुणांक बराबर हो तथा xy का गुणांक शून्य हो, सदैव एक वृत्त को प्रदर्शित करती हैं।

(d) बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) का मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$



यह इस तथ्य से प्राप्त होता है कि अर्धवृत्त में निर्मित कोण समकोण होता है।

$\therefore$ (PA की प्रवणता) (PB की प्रवणता) = – 1

$\Rightarrow$ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \dfrac{y - y_2}{x - x_2} = -1 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

यह (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाला न्यूनतम त्रिज्या का वृत्त होता है।

उदाहरण # 1 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (0, 3) तथा त्रिज्या 3 है।

हल : वृत्त का समीकरण $(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 6y = 0$

उदाहरण # 2 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसके दो व्यास $x + 2y - 5 = 0$ और $x - y + 1 = 0$ है तथा वृत्त (1, –1) से गुजरता है।

हल : सरल रेखाओं

$x + 2y - 5 = 0$ .....(i)

तथा $x - y + 1 = 0$ .....(ii)

का प्रतिच्छेद बिन्दु केन्द्र हैं। (i) और (ii) को हल करने पर $x = 1, y = 2$ अतः केन्द्र के निर्देशांक (1, 2) हैं। वृत्त बिन्दु (1,–1) से गुजरता है, तो

त्रिज्या = $\sqrt{(1-1)^2+(2+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ त्रिज्या = 3.

अतः वृत्त का समीकरण $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

उदाहरण # 3 यदि समीकरण $ax^2 + (b-3)xy + 3y^2 + 6ax + 2by - 3 = 0$ एक वृत्त को निरूपित करती हो तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण $ax^2 + (b-3)xy + 3y^2 + 6ax + 2by - 3 = 0$ एक वृत्त को निरूपित करेगा यदि

x^2 का गुणांक = y^2 का गुणांक

$a = 3$

xy का गुणांक = 0

$b = 3$

उदाहरण # 4 वृत्त की समीकरण कीजिए जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (x_1, y_1) और (x_2, y_2) है जहाँ x_1, x_2 समीकरण $x^2 - ax + b = 0$ के मूल है तथा y_1, y_2 समीकरण $y^2 - by + a = 0$ के मूल हैं।

हल : बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) का मिलाने वाले सरल रेखाखण्ड को व्यास मानकर खींचे गयें वृत्त का समीकरण

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$

$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

यहाँ, $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b$

$y_1 + y_2 = b$, $y_1y_2 = a$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 - ax - by + a + b = 0$

अभ्यास कार्य :

(1) वृत्त का समीकरण कीजिए जो सरल रेखाओं $x + 3y = 0$ और $2x - 7y = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र सरल रेखाओं $x + y + 1 = 0$ और $x - 2y + 4 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

(2) वृत्त का समीकरण कीजिए, जिसका केन्द्र (1, 2) हैं और जो बिन्दु (4, 6) से गुजरता हैं।

(3) वृत्त का समीकरण कीजिए जिसकी त्रिज्या 6 और केन्द्र मूल बिन्दु हैं।

Answers :

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ (2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ (3) $x^2 + y^2 = 36$.

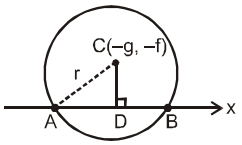
वृत्त द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डः (Intercepts made by a circle on the axes) :

वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा x तथा y अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डो की लम्बाई क्रमशः $2\sqrt{g^2 - c}$ (x-अक्ष पर) और $2\sqrt{f^2 - c}$ (y-अक्ष पर) होती हैं

यदि $g^2 - c > 0$ $\Rightarrow$ वृत्त x अक्ष को दो विभिन्न बिन्दुओं पर काटता है।

$g^2 = c$ $\Rightarrow$ वृत्त x–अक्ष को स्पर्श करता है।

$g^2 < c$ $\Rightarrow$ वृत्त पूर्णतया x–अक्ष के उपर या नीचे स्थित हैं।



$AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - CD^2} = 2\sqrt{r^2 - f^2} = 2\sqrt{g^2 + f^2 - c - f^2} = 2\sqrt{g^2 - c}$

उदाहरण # 5 उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसके x तथा y अन्तःखण्ड क्रमशः a तथा b है।

हल : वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

x अन्तःखण्ड= a $\qquad 2\sqrt{g^2 - c} = a$

$g^2 - c = \dfrac{a^2}{4}$ ..... (i)

y अन्तःखण्ड = b

$2\sqrt{f^2 - c} = b \qquad f^2 - c = \dfrac{b^2}{4}$ ..... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को घटाने पर $g^2 - f^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$

अतः केन्द्र का बिन्दु पथ $x^2 - y^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$

अभ्यास कार्य :

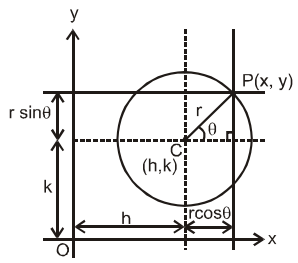
(4) वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा को मूलबिन्दु से 3 इकाई दूरी पर स्पर्श करता हैं और x-अक्ष पर 6 इकाई का अन्तःखण्ड काटता हैं।

(5) वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा को मूलबिन्दु से 2 इकाई दूरी पर स्पर्श करता है तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा पर 3 इकाई का अन्तःखण्ड काटता हैं।

Answers : (4) $x^2 + y^2 \pm 6\sqrt{2}\,x - 6y + 9 = 0$ (5) $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4 = 0$

वृत्त का प्राचलिक समीकरण (Parametric equations of a circle) :

वृत्त $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ का प्राचलिक समीकरण $x = h + r\cos\theta$; $y = k + r\sin\theta$; $-\pi < \theta \le \pi$ जहाँ (h, k) केन्द्र, r त्रिज्या तथा θ प्राचल हैं।



उदाहरण # 6 वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ का प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$

अतः वृत्त के प्राचलिक समीकरण $x = -2 + 2\cos\theta$, $y = -3 + 2\sin\theta$..

उदाहरण # 7 दिये गये वक्र की समीकरण, कार्तीय रूप में ज्ञात कीजिए

$x + y = \cos\theta$, $x - y = \sin\theta$ जहाँ θ प्राचल है

हल :

$x + y = \cos\theta$ ..... (i)

$x - y = \sin\theta$ ..... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$\Rightarrow \quad (x + y)^2 + (x - y)^2 = 1$

$x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$

स्पष्टतया यह एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

अभ्यास कार्य :

(6) वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ के प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

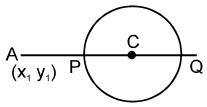
(7) वक्र $x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$, $y = 2 - \sqrt{2}\sin\theta$

Answers : (6) $x = 3 + 5\cos\theta$, $y = -2 + 5\sin\theta$ (7) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

वृत्त के सापेक्ष एक बिन्दु की स्थिति (Position of a point with respect to a circle) :

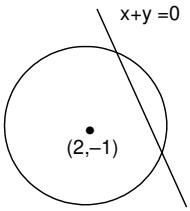
बिन्दु (x_1, y_1) वृत्त $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के अन्दर, ऊपर या बाहर स्थित होगा
यदि $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c <, = \text{or} > 0$.

नोट : किसी बिन्दु A (वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु) की वृत्त जिसकी त्रिज्या r एवं केन्द्र C हो, से अधिकतम व न्यूनतम दूरी क्रमशः AC + r और AC – r होती हैं।



उदाहरण # 8 वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ तथा सरल रेखा $x + y = 0$ द्वारा बने दो भागो (लघु तथा दीर्घ) में से कौनसे भाग में बिन्दु (1, 2) स्थित है।

हल: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ या $S = 0$,



जबकि $S = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11$.
बिन्दु (1, 2) के लिए, $S_1 = 1^2 + 2^2 - 4 \times 1 + 2 \times 2 - 11 < 0$
अतः बिन्दु (1, 2) वृत्त के अन्दर है
सरल रेखा $x + y = 0$ के सापेक्ष बिन्दु (2, –1) तथा (1,2) एक ही ओर स्थित है
अतः बिन्दु (1,2) दीर्घ भाग में स्थित है

अभ्यास कार्य :

(8) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ के सापेक्ष बिन्दु (0, 1), (3, 1) और (1, 3) की स्थिति ज्ञात कीजिए।

Answer : (8) (0, 1) वृत्त पर स्थित हैं ; (3, 1) वृत्त के बाहर स्थित हैं, (1, 3) वृत्त के अन्दर स्थित हैं।

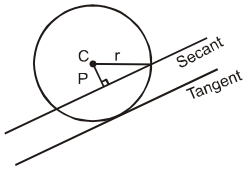
सरल रेखा और वृत्त (Line and a Circle) :

माना L = 0 एक सरल रेखा और S = 0 एक वृत्त हैं, यदि r वृत्त की त्रिज्या तथा p वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की दूरी हो, तो

(i) $p > r \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त को नहीं काटती हैं अर्थात वृत्त के बाहर से गुजरती हैं।
(ii) $p = r \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त को स्पर्श करती हैं (अर्थात यह वृत्त की स्पर्श रेखा है।)
(iii) $p < r \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त की छेदन रेखा है।
(iv) $p = 0 \Rightarrow$ सरल रेखा वृत्त का व्यास है।

यदि $y = mx + c$ एक सरल रेखा और $x^2 + y^2 = a^2$ एक वृत्त हैं, तो

(i) $c^2 < a^2(1 + m^2) \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त की जीवा होगी।
(ii) $c^2 = a^2(1 + m^2) \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त को स्पर्श करेगी अर्थात वृत्त की स्पर्श रेखा होगी
(iii) $c^2 > a^2(1 + m^2) \Leftrightarrow$ सरल रेखा वृत्त को नहीं काटती है अर्थात वृत्त के बाहर से गुजरेगी।



इन प्रतिबन्धों को क्रमानुसार $y = mx + c$ तथा $x^2 + y^2 = a^2$ को हल करके तथा प्राप्त द्विघात समीकरण का विवेचक क्रमशः शून्य से अधिक, शून्य के बराबर तथा शून्य से कम रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण # 9 λ के किस मान के लिए सरल रेखा $x + y = \lambda$ वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ को स्पर्श करती है ?

हल : $x + y = \lambda$ .....(i)

तथा $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ..... (ii)

यदि सरल रेखा (i) वृत्त (ii) को स्पर्श करती है, तो

केन्द्र (1, 1) से डाले गये लम्ब की लम्बाई = वृत्त (ii) की त्रिज्या

$$\Rightarrow \left| \frac{1+1-\lambda}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow |2-\lambda| = 2 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ or } 4$$

अतः सरल रेखा (i) $\lambda = 0$ या 4 के लिए वृत्त (ii) को स्पर्श करती है।

अभ्यास कार्य :

(9) m के मानों का समुच्य ज्ञात कीजिए जिसके लिए सरल रेखा $y = mx + 2$ वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ को दो विभिन्न बिन्दुओंपर प्रतिच्छेद करती है

Answers : (9) $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

स्पर्श रेखा का प्रवणता रूप (Slope form of tangent) :

सरल रेखा $y = mx + c$ सदैव वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा होगी यदि $c^2 = a^2(1 + m^2)$

अतः स्पर्श रेखा की समीकरण $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ और स्पर्श बिन्दु $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$ है।

स्पर्श रेखा का बिन्दु रूप (Point form of tangent) :

(i) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की समीकरण $x x_1 + y y_1 = a^2$ होता है।

(ii) वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$ होता है।

नोट : व्यापक रूप में किसी द्विघात वक्र के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की समीकरण x^2 को $x x_1$ में, y^2 को yy_1 में, x को $\frac{x + x_1}{2}$ में, y को $\frac{y + y_1}{2}$, में, xy को $\frac{x_1y + xy_1}{2}$ में परिवर्तित करके प्राप्त की जा सकती हैं जबकि c में कोई परिवर्तन नहीं किया जाता है।

स्पर्श रेखा का प्राचलिक रूप (Parametric form of tangent) :

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ होता है।

नोट : बिन्दुओ $P(\alpha)$ और $Q(\beta)$ पर खीचीं गयी स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}, \frac{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$

उदाहरण # 10 वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$ के बिन्दु (3,4) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : स्पर्श रेखा का समीकरण $3x + 4y - 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 2\left(\frac{y+4}{2}\right) - 11 = 0$

या $2x + 3y - 18 = 0$

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $2x + 3y - 18 = 0$

उदाहरण # 11 वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ पर सरल रेखा $x + 2y + 4 = 0$ के लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ .....(i)

और दी गई सरल रेखा $x + 2y + 4 = 0$ .....(ii)

वृत्त (i) का केन्द्र (2, –1) और त्रिज्या $\sqrt{5}$ हैं

सरल रेखा (ii) के लम्बवत् रेखा $2x - y + k = 0$ होगी .....(iii)

यदि रेखा (iii) वृत्त (i) की स्पर्श रेखा है तो

$\frac{|4+1+k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ या $|k + 5| = 5$

या $\therefore$ $k = 0, -10$

अतः स्पर्श रेखाओं के समीकरण $2x - y = 0$ और $2x - y - 10 = 0$

अभ्यास कार्य :

(10) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि सरल रेखा $3x - 4y - 1 = 0$ के (i) समान्तर है, (ii) लम्बवत हैं।

Answer.

(i) $3x - 4y + 20 = 0$ और $3x - 4y - 10 = 0$ (ii) $4x + 3y + 5 = 0$ और $4x + 3y - 25 = 0$

अभिलम्ब (Normal) :

यदि कोई सरल रेखा एक वृत्त का अभिलम्ब हो, तो यह वृत्त के केन्द्र से गुजरनी चाहिए। अतः वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब $y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$ है।

उदाहरण # 12 वृत्त के दो अभिलम्ब $2x + 3y = 5$ और $3x - 4y + 1 = 0$ है तो वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसकी त्रिज्या 2 ईकाई है

हल : अभिलम्बो $2x + 3y = 5$ और $3x - 4y + 1 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु (1,1) वृत्त का केन्द्र होगा

अतः वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र (1,1) तथा त्रिज्या 2 ईकाई है होगा

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

अभ्यास कार्य :

(11) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ के बिन्दु (2, 3) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

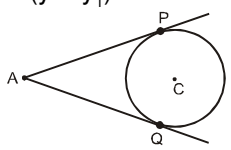
Answer : (11) $x - y + 1 = 0$

एक बिन्दु से स्पर्शी–युग्म का समीकरण (Pair of Tangents from a Point) :

बिन्दु A (x_1, y_1) से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींचे गये स्पर्शी–युग्म का समीकरण $SS_1 = T^2$ होता हैं।

जहाँ $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$; $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c.$



उदाहरण # 13 बिन्दु (2, 1) से वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ पर खींची गयी स्पर्शी युग्म का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $S = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

मानाकि $P \equiv (2, 1)$ बिन्दु P के लिए $S_1 = 16$

अतः बिन्दु P वृत्त के बाहर स्थित है। और $T \equiv 2x + y + 2(x + 2) - 3(y + 1) + 9 = 0$

अर्थात $T \equiv 2(2x - y + 5)$

बिन्दु P(2, 1) से वृत्त (i) पर खींची गयी स्पर्शी युग्म की समीकरण $SS_1 = T^2$ है–

या $16(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9) = 4(2x - y + 5)^2$ या $12y^2 - 16x - 56y + 16xy + 44 = 0$

या $3y^2 - 4x - 14y + 4xy + 11 = 0$

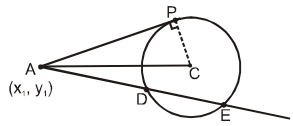
अभ्यास कार्य :

(12) बिन्दु (7, 1) से वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं का संयुक्त समीकरण ज्ञात करो।

Answer : (12) $12x^2 - 12y^2 + 7xy - 175x - 25y + 625 = 0$

स्पर्श रेखा की लम्बाई तथा बिन्दु–शक्ति (Length of a tangent and power of a point) :

किसी बाह्य बिन्दु (x_1, y_1) से वृत्त $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खीचीं स्पर्श रेखा की लम्बाई $L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2f_1 y + c} = \sqrt{S_1}$ के द्वारा दी जाती है।



AP = स्पर्श रेखा की लम्बाई

$AP^2 = AD \cdot AE$

किसी बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई किसी स्पर्श रेखा की लम्बाई का वर्ग, वृत्त के सापेक्ष बिन्दु A की "बिन्दु–शक्ति" कहलाती है।

किसी वृत्त के सापेक्ष किसी "बिन्दु–शक्ति" नियत होती हैं।

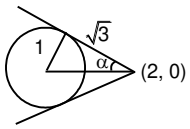
यदि बिन्दु Aवृत्त के बाहर, अन्दर और वृत्त पर स्थित है तो "बिन्दु–शक्ति" क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य होती है।

उदाहरण # 14 बिन्दु (2, 0) से वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है। .....(i)

एवं दिया गया बिन्दु माना P = (2, 0) है। अतः बिन्दु P(2, 0) से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई (i) = $\sqrt{2^2 + 0^2 - 1} = \sqrt{3}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\alpha = \frac{\pi}{6}$

अतः स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण $= 2\alpha = \frac{\pi}{3}$

अभ्यास कार्य :

(13) बिन्दु P(1, –1) तथा Q(3, 3) से एक वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई क्रमशः तथा है तो बिन्दु R (– 1, – 5) से उसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

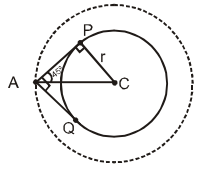
(14) वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Answer. (13) $\sqrt{38}$ (14) $\sqrt{7}$

नियामक वृत्त (Director Circle) :

दो परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ दिये वृत्त का नियामक वृत्त कहलाता है। वृत्त का नियामक वृत्त दिये गये वृत्त की त्रिज्या का $\sqrt{2}$ गुना त्रिज्या वाला संकेन्द्रीय वृत्त होता है।

सत्यापन :



$AC = r \text{ cosec } 45^\circ = r\sqrt{2}$

उदाहरण # 15 वृत्त $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$ के नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये वृत्त का केन्द्र $(-3, -4)$ और $\sqrt{27}$ है।

अतः नियामक वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या क्रमशः $(-3, -4)$ और त्रिज्या $\sqrt{27}.\sqrt{2} = \sqrt{54}$ होगी।

$\therefore$ अतः नियामक वृत्त का समीकरण $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 54 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y - 29 = 0$

अभ्यास कार्य :

(15) बिन्दु $(5, \sqrt{7})$ से वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Answer (15) $\frac{\pi}{2}$

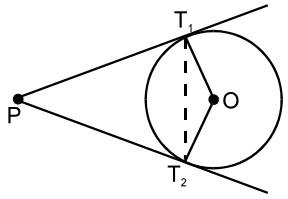
स्पर्शी जीवा (Chord of Contact) :

यदि दो स्पर्श रेखाएँ PT_1 और PT_2 बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से वृत्त $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खीचीं गयी है, तो स्पर्शी जीवा T_1T_2 का समीकरण निम्न होगा।

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

नोट : यहाँ R = त्रिज्या; L = स्पर्श रेखा की लम्बाई है

(a) स्पर्शी जीवा तभी विद्यमान होगी जब बिन्दु 'P'वृत्त के अन्दर स्थित नहीं है।



(b) स्पर्शी जीवा की लम्बाई $T_1T_2 = \frac{2LR}{\sqrt{R^2 + L^2}}$.

(c) स्पर्शी युग्म तथा स्पर्शी जीवा से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{RL^3}{R^2 + L^2}$

(d) बिन्दु (x_1, y_1) से खींची गई स्पर्शी युग्म के बीच के कोण की स्पर्शज्या $(\tan\theta) = \left(\frac{2RL}{L^2 - R^2}\right)$

(e) त्रभुज PT_1T_2 के परिवृत्त का समीकरण $(x - x_1)(x + g) + (y - y_1)(y + f) = 0.$

उदाहरण # 16 बिन्दु (0, 1) से वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ पर खीचीं गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्शी जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ .....(i)

मानाकि $P = (0, 1)$

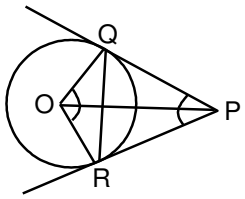
बिन्दु P(0, 1) के लिए, $T = x . 0 + y . 1 - (x + 0) + 2(y + 1)$

अर्थात $T = x - 3y - 2$

अतः बिन्दु P(0, 1) की वृत्त (i) के सापेक्ष स्पर्शी जीवा $x - 3y - 2 = 0$

उदाहरण # 17 यदि बिन्दु (α, β) से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती हो तो सिद्ध कीजिए की $\alpha^2 + \beta^2 = 2a^2$.

हल: $\angle QOR = \angle QPR = \frac{\pi}{2}$



अतः OQPR एक वर्ग है।

$OQ^2 = PQ^2$

$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 2a^2$

अभ्यास कार्य :

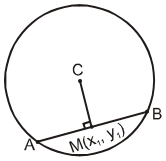
(16) सरल रेखा $x - 2y + 1 = 0$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओ पर खीचीं गयी स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करो।

(17) यदि वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित किसी बिन्दु से दूसरे वृत्त $x^2 + y^2 = b^2$ पर खींची गई स्पर्श जीवा वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ का स्पर्श करती है तो सिद्ध कीजिए की a,b,c गुणोत्तर श्रेणी में है।

Answers : (16) (–25, 50) (17) $\frac{405\sqrt{3}}{52}$ वर्ग इकाई ; $4x + 6y - 25 = 0$

जीवा का समीकरण जिसका मध्यबिन्दु दिया गया हो
(Equation of the chord with a given middle point) :

वृत्त $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की जीवा जिसका मध्य बिन्दु $M(x_1, y_1)$ है, का समीकरण $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ है जो कि $T = S_1$ से प्रदर्शित किया जाता है।



नोट : **(i)** वृत्त के अन्दर बिन्दु 'M' से गुजरने वाली न्यूनतम लम्बाई की जीवा वह होती है जिसका मध्य बिन्दु M हो।

(ii) वृत्त के अन्दर बिन्दु 'M' से गुजरने वाली जीवा जो केन्द्र से अधिकतम दूरी पर स्थित हो, का मध्य बिन्दु M होता है।

उदाहरण # 18 वृत्त $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$ के सापेक्ष जीवा का समीकरण ज्ञात करो जिसका मध्य बिन्दु (0, 0) है।

हल : दिये गये वृत्त का समीकरण $S \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$

माना $L \equiv (0, 0)$

बिन्दु L(0, 0) के लिए $S_1 = -4$ और

$T \equiv x.0 + y(0) + (x + 0) - (y + 0) - 4$ अर्थात $T \equiv x - y - 4$

अतः वृत्त (i) के सापेक्ष जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु L(0, 0) है –

$T = S_1$ or $x - y = 0$

द्वितीय विधि:

माना C दिये गये वृत्त का केन्द्र है तब $C \equiv (-1, 1)$. $L \equiv (0, 0)$ तथा CL की प्रवणता $= -1$

वृत्त की जीवा का समीकरण जिसका मध्य बिन्दु L हैं –

$\therefore$ $y - 0 = 1(x - 0)$ [$\because$ जीवा CL के लम्बवत् है]

या $x - y = 0$

अभ्यास कार्य :

(18) वृत्त $x^2 + y^2 = 15$ की उस जीवा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु (3, 2) पर विभाजित होती है।

(19) एक चर जीवा मूल बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ पर खींची जाती है तो इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

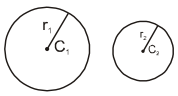
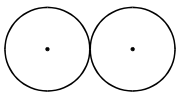
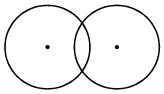
Answers : (18) $3x + 2y - 13 = 0$ (19) $x^2 + y^2 - ax = 0$

वृत्त के दो बिन्दुओं को जोड़ने वाली जीवा का समीकरण (Equation of the chord joining two points of circle) :

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित दो बिन्दुओं $P(\alpha)$ तथा $Q(\beta)$ को जोड़ने वाली जीवा PQ का समीकरण निम्न होता हैं

$$x \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + y \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = a \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ (Common tangents to two circles) :

	स्थिति	स्पर्श रेखाओं की संख्या	स्थिति
(i)		4 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ (2 अनुस्पर्शी और 2 तिर्यक)	$r_1 + r_2 < c_1 c_2$.
(ii)		3 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ	$r_1 + r_2 = c_1 c_2$.
(iii)		2 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ	$\lvert r_1 - r_2 \rvert < c_1 c_2 < r_1 + r_2$
(iv)		1 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा	$\lvert r_1 - r_2 \rvert = c_1 c_2$.
(v)		कोई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा नही	$c_1 c_2 < \lvert r_1 - r_2 \rvert$.

यहाँ C_1C_2 दो वृत्तों के केन्द्रो के बीच की दूरी है।)

नोट : (i) दो वृत्तों की अनुस्पर्शी (direct) उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ एक ऐसे बिन्दु पर मिलती है जो वृत्तों के केन्द्रो को मिलाने वाली रेखा को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है। दो वृत्तो की तिर्यक स्पर्श रेखाएँ एक ऐसे बिन्दु पर मिलती हैं जो वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

(ii) बाह्य (external) तथा तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई $L_{ext} = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ और $L_{int} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$, द्वारा दी जाती है। जहाँ d = दो वृत्तों के केन्द्रो के बीच की दूरी है और r_1, r_2 वृत्तों की त्रिज्याएँ है तथा तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई हमेशा बाह्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई से कम होती है।

उदाहरण # 19 जांच करो कि दिये गये वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ एवं $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते है या नही–

हल : दिये गये वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ .....(i)

और $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ .....(ii)

माना A एवं B वृत्तों (i) और (ii) के केन्द्र तथा r_1 व r_2 त्रिज्याएँ हो, तो

$A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (5, 3)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$

अब AB –3 तथा $r_1 + r_2 = 6$, $|r_1 - r_2| = 2$

तब $|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2$, अतः दोनों वृत्त प्रतिच्छेद करते है।

अभ्यास कार्य :

(20) वृत्त $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 20 = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 14x - 6y + 22 = 0$ की एक दूसरे के सापेक्ष स्थिति ज्ञात करो।

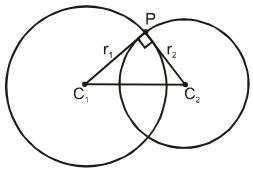
Answer : (20) दोनो वृत्त बाह्यय स्पर्श करते है।

दो वृत्तों की लम्बकोणीयता (Orthogonality Of Two Circles) :

दो वृत्त $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ लम्बकोणीय या लम्बकोणीय प्रतिच्छेदी कहलाते हैं यदि उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर स्पर्श रेखाएँ समकोण बनाती हैं,

दो वृत्तों के लम्बकोणीय होने का प्रतिबन्ध : $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ है।

सत्यापन :



$(C_1C_2)^2 = (C_1P)^2 + (C_2P)^2 \quad \Rightarrow \quad (g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$

$\Rightarrow \quad 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

नोट : (a) दो स्थिर वृत्तों को लम्बकोणीय काटने वाले एक चर वृत्त का केन्द्र उन वृत्तों के मूलाक्ष पर रहता है।

(b) यदि दो वृत्त लम्बकोणीय है, तो प्रथम वृत्त पर स्थित बिन्दु 'P' की द्वितीय वृत्त के सापेक्ष ध्रुवी, बिन्दु Q से गुजरती है, जो कि बिन्दु P से गुजरने वाले व्यास का अन्तिम बिन्दु है। अतः ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ जिसकी ध्रुवियाँ वृत्त $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ एवं $S_3 = 0$ के सापेक्ष संगामी हो, एक वृत्त होगा जो कि दिये गये तीनों वृत्तों से लम्बकोणीय होगा।

(c) वृत्त का केन्द्र जो कि दिये गये तीनों वृत्तो के लम्बकोणीय है मूलाक्ष केन्द्र कहलाता है जबकि यह दिये गये वृत्तों के बाहर स्थित है।

उदाहरण # 20 यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ तथा $2x^2 + 2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ परस्पर लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते है तो सिद्ध कीजिए की $g_1g_2 + f_1f_2 = c_1 + \frac{c_2}{2}$

हल : दिये गये वृत्त $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ .....(i)

और $2x^2 + 2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

या $x^2 + y^2 + g_2x + f_2y + \frac{c_2}{2} = 0$ .....(ii)

वृत्त (i) तथा (ii) लम्बकोणीय है।

$\therefore \quad 2g_1\left(\frac{g_2}{2}\right) + 2f_1\left(\frac{f_2}{2}\right) = c_1 + \frac{c_2}{2}$

$g_1g_2 + f_1f_2 = c_1 + \frac{c_2}{2}$

अभ्यास कार्य :

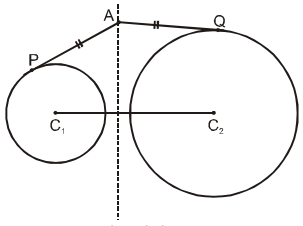
(21) λ के किस मान के लिए वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 3y + 9 = 0$ और $x^2 + y^2 + 2x - y - \lambda = 0$ परस्पर लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं।

(22) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र सरल रेखा $x - y = 0$ पर स्थित है तथा वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता हैं।

Ans. (21) $\frac{5}{2}$ (22) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

मूलाक्ष तथा मूलाक्ष केन्द्र (Radical Axis and Radical Centre) :

दो वृत्तों का मूलाक्ष एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी दिये गये वृत्तो के सापेक्ष शक्ति (power) परस्पर बराबर होती है। दो वृत्तों $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ के मूलाक्ष का समीकरण $S_1 - S_2 = 0$
अर्थात् $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$ होता है।



तीन वृत्तों के मूलाक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु (युग्म में लेने पर) मूलाक्ष केन्द्र कहलाता है। इससे तीनों वृत्तों पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती हैं।

नोट :
(a) यदि दो वृत्त प्रतिच्छेद करते हो, तो उभयनिष्ठ जीवा ही मूलाक्ष होती हैं।
(b) यदि दो वृत्त परस्पर स्पर्श करते हो, तो उभयनिष्ठ स्पर्श बिन्दु पर स्पर्श रेखा ही मूलाक्ष होती हैं।
(c) मूलाक्ष हमेशा वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् होता है।
(d) मूलाक्ष दो वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से गुजरता है, यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हो।
(e) मूलाक्ष दो वृत्तों के मध्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को दो बराबर भागों में विभाजित करती हैं।
(f) वृत्तों का निकाय जिसमें प्रत्येक युग्म समान मूलाक्ष रखता हो, समाक्ष वृत्तों का निकाय (coaxial system) कहलाता हैं।
(g) वृत्त युग्म जिसकी मूलाक्ष नहीं होती संकेन्द्रीय होते हैं।

उदाहरण # 21 उस बिन्दु के निर्देशांक कीजिए जिससे दिये गये तीनों वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर हो।

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$$

हल : यहाँ हमें दिये गये तीनों वृत्तों का मूलाक्ष केन्द्र ज्ञात करना है। सर्वप्रथम इनके मानक रूप में परिवर्तित करते हैं जिसमें x^2 और y^2 का गुणांक इकाई होता है। जोडों (pair) में लेकर घटाने पर मूलाक्ष

$x = 2$; $8x + 10y + 9 = 0$
और $10y + 25 = 0$ होंगे।

किन्ही दो को हल करने पर हमे बिन्दु $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ प्राप्त होता हैं जो कि तृतीय को संतुष्ट करता है। यही बिन्दु मूलाक्ष केन्द्र कहलाता है तथा परिभाषा से स्पर्श रेखा की लम्बाई इस बिन्दु से तीनों वृत्तों पर बराबर है।

अभ्यास कार्य :

(23) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो जिससे तीनों वृत्तों $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 9 = 0$ एवं $x^2 + y^2 + y = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ बराबर हो तथा यह लम्बाई भी ज्ञात करो।

Answer : (23) (2, – 1) ; 2.

वृत्त निकाय (Family of Circles) :

इस भाग के अन्दर, एक विशेष लक्षण वाले वृत्त समुह का समीकरण ज्ञात किया गया है उदाहरणार्थ समीकरण $x^2 + y^2 + 4x + 2y + \lambda = 0$ जहाँ λ एक स्वेच्छ अचर है, एक नियत केन्द्र (–2, –1) परन्तु चर त्रिज्या वाले वृत्त समूह को प्रदर्शित करता है। कुछ अन्य वृत्त समूह के लिए हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं।

(a) दो वृत्तों $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त निकाय का समीकरण $S_1 + KS_2 = 0$ ($K \neq -1$ तथा S_1 एवं S_2 में x^2 और y^2 के गुणांक समान दिये गये हैं।)

(b) वृत्त $S = 0$ और सरल रेखा $L = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त निकाय का समीकरण $S + KL = 0$ होता है।

(c) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाले वृत्त निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+K\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ K प्राचल है।

(d) स्थिर बिन्दु (x_1, y_1) पर स्थिर सरल रेखा $y - y_1 = m(x - x_1)$ को स्पर्श करने वाले वृत्त निकाय का समीकरण $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + K[y - y_1 - m(x - x_1)] = 0$ द्वारा दिया जाता है। जहाँ K प्राचल है।

(e) उस वृत्त निकाय का समीकरण जो कि ऐसे त्रिभुज के शीर्षो से गुजरता है जिसके भुजाएँ क्रमशः $L_1 = 0$; $L_2 = 0$ और $L_3 = 0$ है, $L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_3L_1 = 0$ होती है। जहाँ λ तथा μ के मान निम्न प्रतिबन्धों का उपयोग कर निकाले जा सकते हैं –
xy का गुणांक = 0 और x^2 का गुणांक = y^2 का गुणांक

(f) उस वृत्त का समीकरण जो कि ऐसे चतुर्भुज के शीर्षो से गुजरता है जिसकी भुजाएँ क्रमशः $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ और $L_4 = 0$ है, $\mu L_1L_3 + \lambda L_2L_4 = 0$ होता है, जहाँ λ तथा μ के मान प्रतिबन्धों xy का गुणांक शून्य और x^2 का गुणांक = y^2 का गुणांक, का उपयोग करके ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण # 22 दिये गये वृत्तों $x^2 + y^2 + 13x - 3y = 0$ और $2x^2 + 2y^2 + 4x - 7y - 25 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं तथा बिन्दु (1, 1) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए

हल : दिये गये वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाला वृत्त

$S_1 + \lambda S_2 = 0$

या $x^2 + y^2 + 13x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 + 2x - 7y/2 - 25/2) = 0$

यह वृत्त (1, 1) से गुजरता है।

$1 + 1 + 13 - 3 + \lambda(1 + 1 + 2 - 7/2 - 25/2) = 0$

$\lambda = 1$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर अभिष्ट वृत्त $4x^2 + 4y^2 + 30x - 13y - 25 = 0$ है।

उदाहरण # 23 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा $x + y = 1$ एवं वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ के प्रतिच्देद बिन्दुओं से गुजरता हैं तथा जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो–

हल : वृत्त का समीकरण $S + \lambda L = 0$

$x^2 + y^2 - 9 + \lambda(x + y - 1) = 0$ ....(i)

केन्द्र $(-g, -f) = \left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ केन्द्र रेखा $x + y = 1$ पर स्थित है।

centre lies on the line $x + y = 1$

$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 1$

$\lambda = -1$

λ का मान (i) में रखने पर वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 - x - y - 8 = 0$

उदाहरण # 24 बिन्दुओं A(1, 1) और B(0, 3) से गुजरने वाले वृत्त जिसकी त्रिज्या $\sqrt{\frac{5}{2}}$ हो, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : AB का समीकरण $2x + y - 3 = 0$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x - 1)(x) + (y - 1)(y - 3) + \lambda(2x + y - 3)$

$= 0$ or $x^2 + y^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 4)y + 3 - 3\lambda = 0$ $\qquad \sqrt{\left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-4}{2}\right) + 3\lambda - 3} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\lambda = 1$

अतः वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$ है।

उदाहरण # 25 एक चर वृत्त सदैव सरल रेखा $x + y = 2$ को (1, 1) पर स्पर्श करता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$ को प्रतिच्छेद करता है तो सिद्ध कीजिए की दोनो वृत्तो की उभयनिष्ठ जीवा सदैव एक स्थिर बिन्दु से गुरजती है। बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda(x + y - 2) = 0$ है।

$x^2 + y^2 + x(\lambda - 2) + y(\lambda - 2) + 2 - 2\lambda = 0$

इस वृत्त की वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$ के साथ उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण

$(\lambda - 6)x + (\lambda - 7)y + 8 - 2\lambda = 0$

$\lambda(x + y - 2) + (-6x - 7y + 8) = 0$

यह जीवा सदैव सरल रेखाओं $x + y - 2 = 0$ तथा $-6x - 7y + 8 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है। जोकि (6, –4) है।

उदाहरण # 26 त्रिभुज जिसकी भुजाएँ $3x - y - 12 = 0$, $5x - 3y - 28 = 0$ और $x + y - 4 = 0$ हैं, के शीर्षो से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $L_1L_2 + \lambda L_2L_3 + \mu L_1L_3 = 0$

$(3x - y - 12)(5x - 3y - 28) + \lambda(5x - 3y - 28)(x + y - 4) + \mu(3x - y - 12)(x + y - 4) = 0$

x^2 का गुणांक = y^2 का गुणांक

$\Rightarrow \quad 5\lambda + 3\mu + 15 = 3 - 3\lambda - \mu$

$8\lambda + 4\mu + 12 = 0$

$2\lambda + \mu + 3 = 0$ .....(ii)

xy का गुणांक = 0 $\Rightarrow$ $2\lambda + 2\mu - 14 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda + \mu - 7 = 0$ .....(iii)

(ii) और (iii) को हल करने पर $\lambda = -10, \mu = 17$

λ और μ के मान समीकरण (i) में रखने पर $2x^2 + 2y^2 - 9x + 11y + 4 = 0$

अभ्यास कार्य :

(24) वृत्तों $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ और $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र सरल रेखा $y = x$ पर स्थित है।

(25) चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ $x + y = 10$, $x - 7y + 50 = 0$, $22x - 4y + 125 = 0$ और $2x - 4y - 5$ है, के शीर्षो से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Answers : (24) $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$ (25) $x^2 + y^2 = \frac{125}{2}$

Exercise-1

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Equation of circle, parametric equation, position of a point
खण्ड (A) : वृत्त का समीकरण, प्राचलिक समीकरण, बिन्दु की स्थिति

A-1. Find the equation of the circle that passes through the points (1, 0), (– 1, 0) and (0, 1).
बिन्दुओं (1, 0), (– 1, 0) और (0, 1) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Ans. $x^2 + y^2 = 1$

A-2. ABCD is a square in first quadrant whose side is a, taking AB and AD as axes, prove that the equation to the circle circumscribing the square is $x^2 + y^2 = a(x + y)$.
भुजा a वाला एक वर्ग ABCD प्रथम चतुर्थांश में है। भुजा AB और AD को अक्ष लेते हुए सिद्ध कीजिए कि वर्ग के परिगतवृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a(x + y)$ है।

A-3. Find the equation to the circle which passes through the origin and cuts off intercepts equal to 3 and 4 from the positive axes.
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से गुजरता है तथा धनात्मक अक्षों पर क्रमशः 3 और 4 लम्बाई के अन्तःखण्ड काटता है।
Ans. $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

A-4. Find equation of circle which touches x & y axis & perpendicular distance of centre of circle from $3x + 4y + 11 = 0$ is 5. Given that circle lies in Ist quadrant.
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x व y अक्ष को स्पर्श करता है तथा रेखा $3x + 4y + 11 = 0$ से वृत्त के केन्द्र की लम्बवत् दूरी 5 है। दिया गया है कि वृत्त प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।
Ans. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

A-5.✍ Find the equation to the circle which touches the axis of x at a distance 3 from the origin and intercepts a distance 6 on the axis of y.
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को मूलबिन्दु से 3 इकाई दूरी पर स्पर्श करता है और y-अक्ष पर 6 इकाई का अन्तःखण्ड काटता हैं।
Ans. $x^2 + y^2 \pm 6\sqrt{2}y \pm 6x + 9 = 0$

A-6. Find equation of circle whose cartesian equation are $x = -3 + 2\sin\theta$, $y = 4 + 2\cos\theta$

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी कार्तीय समीकरण $x = -3 + 2\sin\theta$, $y = 4 + 2\cos\theta$ है।
Ans. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

A-7. Find the values of p for which the power of a point (2, 5) is negative with respect to a circle $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$ which neither touches the axes nor cuts them.
वृत्त $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$ जो न तो अक्षों को काटता हो न ही स्पर्श करता हो तथा बिन्दु (2, 5) के सापेक्ष बिन्दु–शक्ति ऋणात्मक होने के लिये p के मान ज्ञात कीजिए।
Ans. (36, 47)

Section (B) : Line and circle, tangent, pair of tangent
खण्ड (B) : रेखा एवं वृत्त, स्पर्श रेखा, स्पर्श रेखा युग्म

B-1. If radii of the largest and smallest circle passing through the point $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ and touching the circle $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}\,y - 2 = 0$ are r_1 and r_2 respectively, then find the difference between r_1 and r_2 .
यदि बिन्दु $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ से गुजरने वाले और वृत्त $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}\,y - 2 = 0$ को स्पर्श करने वाले सबसे बडे और सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्याएं क्रमशः r_1 और r_2 है तब r_1 और r_2 के मध्य अन्तर ज्ञात कीजिए।

Ans. 2

B-2. Find the points of intersection of the line $x - y + 2 = 0$ and the circle $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$. Also determine the length of the chord intercepted.
वृत्त $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$ तथा सरल रेखा $x - y + 2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। प्रतिच्छेदन से प्राप्त जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

Ans. (1, 3), (5, 7), $4\sqrt{2}$

B-3. Show that the line $7y - x = 5$ touches the circle $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$ and find the equation of the other parallel tangent.
प्रदर्शित कीजिए कि सरल रेखा $7y - x = 5$, वृत्त $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$ को स्पर्श करती है तथा इसके समान्तर अन्य स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x - 7y - 45 = 0$

B-4. Find the equation of the tangents to the circle $x^2 + y^2 = 4$ which make an angle of 60º with the positive x-axis in anticlockwise direction .
वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि वामावर्त दिशा में धनात्मक x अक्ष से 60º का कोण बनाती है।

Ans. $\sqrt{3}x - y \pm 4 = 0$

B-5. Show that two tangents can be drawn from the point (9, 0) to the circle $x^2 + y^2 = 16$; also find the equation of the pair of tangents and the angle between them.
प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (9, 0) से वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है। इस स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण और उनके मध्य कोण भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $16x^2 - 65y^2 - 288x + 1296 = 0$, $\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{65}}{49}\right)$

B-6. If the length of the tangent from (f, g) to the circle $x^2 + y^2 = 6$ be twice the length of the tangent from (f, g) to the circle $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$, then will $f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0$?

यदि बिन्दु (f, g) से वृत्त $x^2 + y^2 = 6$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई, बिन्दु (f, g) से वृत्त $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई से दुगनी हो, तो $f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0$ सत्य है अथवा असत्य ?

Ans. Yes सत्य

Section (C) : Normal, Director circle, chord of contact, chord with mid point
खण्ड (C) : अभिलम्ब, नियामक वृत्त, स्पर्श जीवा, मध्य बिन्दु वाली जीवा

C-1. Find the equation of the normal to the circle $x^2 + y^2 = 5$ at the point (1, 2)
बिन्दु (1,2) पर वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $2x - y = 0$

C-2. Find the equation of the normal to the circle $x^2 + y^2 = 2x$, which is parallel to the line $x + 2y = 3$.

वृत्त $x^2 + y^2 = 2x$ के उस अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा $x + 2y = 3$ के समान्तर हो।

Ans. $x + 2y - 1 = 0$

C-3. Find the equation of director circle of the circle $(x + 4)^2 + y^2 = 8$

वृत्त $(x + 4)^2 + y^2 = 8$ के नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $(x + 4)^2 + y^2 = 16$

C-4. Tangents are drawn from the point (h, k) to the circle $x^2 + y^2 = a^2$; prove that the area of the triangle formed by them and the straight line joining their points of contact is $\frac{a(h^2+k^2-a^2)^{3/2}}{h^2+k^2}$ c.

बिन्दु (h,k) से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श रेखाओं तथा स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{a(h^2+k^2-a^2)^{3/2}}{h^2+k^2}$ होता है।

C-5. Find the equation of the chord of the circle $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ whose middle point is $(-2, -3)$.

वृत्त $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ की उस जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मध्य बिन्दु $(-2, -3)$ है।

Ans. $x + y + 5 = 0$

C-6. Tangents are drawn to the circle $x^2 + y^2 = 12$ at the points where it is met by the circle $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$; find the point of intersection of these tangents.

वृत्त $x^2 + y^2 = 12$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है जहाँ पर यह वृत्त $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$ से मिलता है, तो इन स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Ans. $\left(6, -\frac{18}{5}\right)$

Section (D) : Position of two circle, Orthogonality, Radical axis and radical centre

खण्ड (D) : दो वृत्तों की स्थिति, लम्बकोणीयता, मूलाक्ष एवं मूलाक्ष केन्द्र

D-1. Find the equations to the common tangents of the circles $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

वृत्तों $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ एवं $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x = 0$, $3x + 4y = 10$, $y = 4$ and $3y = 4x$.

$x = 0$, $3x + 4y = 10$, $y = 4$ एवं $3y = 4x$.

D-2. Show that the circles $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 6 = 0$ cut each other orthogonally.

सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$ और $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 6 = 0$ एक दूसरे को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं।

D-3. Find the equation of the circle passing through the origin and cutting the circles $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$ and $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ at right angles.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा वृत्तों $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$ और $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ को समकोण पर काटता हैं।

Ans. $2(x^2 + y^2) - 7x + 2y = 0$

D-4. Given the three circles $x^2 + y^2 - 16x + 60 = 0$, $3x^2 + 3y^2 - 36x + 81 = 0$ and $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 84 = 0$, find (1) the point from which the tangents to them are equal in length and (2) this length.

तीन वृत्त $x^2 + y^2 - 16x + 60 = 0$, $3x^2 + 3y^2 - 36x + 81 = 0$ और $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 84 = 0$ हो, तो ज्ञात कीजिए

(1) उस बिन्दु के निर्देशांक जिससे इन वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ परस्पर बराबर हो।

(2) इन स्पर्श रेखाओं की लम्बाई।

Ans. $\left(\frac{33}{4}, 2\right)$; $\frac{1}{4}$

Section (E) : Family of circles , Locus, Miscellaneous

खण्ड (E) : वृत्त निकाय, बिन्दुपथ, विविध

E-1. If $y = 2x$ is a chord of the circle $x^2 + y^2 - 10x = 0$, find the equation of a circle with this chord as diameter.

यदि $y = 2x$ वृत्त $x^2 + y^2 - 10x = 0$ की जीवा हो, तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए यह जीवा व्यास है।

Ans. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

E-2. Find the equation of a circle which touches the line $2x - y = 4$ at the point $(1, -2)$ and

वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $2x - y = 4$ को बिन्दु $(1, -2)$ पर स्पर्श करती है।

(i) Passes through (3, 4) (i) (3, 4 से गुजरती है।

(ii) Radius = 5 (ii) त्रिज्या = 5

Ans. (i) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 20\,(2x - y - 4) = 0$

(ii) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \pm \sqrt{20}\,(2x - y - 4) = 0$

E-3. Show that the equation $x^2 + y^2 - 2x - 2\lambda y - 8 = 0$ represents for different values of λ a system of circles passing through two fixed points A and B on the x-axis, and also find the equation of that circle of the system the tangent to which at A and B meet on the line $x + 2y + 5 = 0$.

दर्शाइये कि समीकरण $x^2 + y^2 - 2x - 2\lambda y - 8 = 0$ के लिए λ के भिन्न–भिन्न मानों के लिए वृत्तों का निकाय दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B से गुजरता है जो x-अक्ष पर मिलता है। तथा वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि स्पर्श रेखा निकाय, रेखा $x + 2y + 5 = 0$ को A तथा B पर मिलता है।

E-4. Consider a family of circles passing through two fixed points A (3, 7) and B (6, 5). Show that the chords in which the circles $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ cuts the members of the family are concurrent at a point. Also find the co-ordinates of this point.

माना कि वृत्तों का निकाय दो स्थिर बिन्दुओं A (3, 7) और B (6, 5) से गुजरता है। दर्शाइयें कि जीवाऐं जो वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ को निकाय के सदस्य को एक बिन्दु पर संगामी होती है। तथा इस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

Ans. $\left(\frac{52}{3}, -\frac{23}{9}\right)$

E-5. Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines $x + y = 6$, $2x + y = 4$ and $x + 2y = 5$.

सरल रेखाओं $x + y = 6$, $2x + y = 4$ और $x + 2y = 5$ से निर्मित त्रिभुज के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$

E-6. Prove that the circle $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$ and $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$ touches each other if $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$

सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$ और $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$ एक दूसरे को स्पर्श करते है

यदि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A) : Equation of circle, parametric equation, position of a point

खण्ड (A) : वृत्त का समीकरण, प्राचलिक समीकरण, बिन्दु की स्थिति

A-1. The radius of the circle passing through the points (1, 2), (5, 2) & (5, – 2) is:
(A) $5\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D*) $2\sqrt{2}$

बिन्दुओं (1, 2), (5, 2) एवं (5, – 2) से गुजरने वाले वृत्त की त्रिज्या है –

(A) $5\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D*) $2\sqrt{2}$

A-2. The centres of the circles $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 7 = 0$ and $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$ are the ends of the diameter of the circle
वृत्तों $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 7 = 0$ और $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$ के केन्द्र निम्न में से किस वृत्त के व्यास के अन्तिम बिन्दु हैं।
(A*) $x^2 + y^2 - 5x - 9y + 26 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 5x - 9y + 14 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 5x - y - 14 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 5x + y + 14 = 0$

A-3. The circle described on the line joining the points (0, 1), (a, b) as diameter cuts the x–axis in points whose abscissa are roots of the equation:
बिन्दुओं (0, 1) और (a, b) को मिलाने वाली सरल रेखा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, x–अक्ष को जिन बिन्दुओं पर काटता है, उनके भुज जिस समीकरण के मूल है, वह है –
(A) $x^2 + ax + b = 0$ (B*) $x^2 - ax + b = 0$ (C) $x^2 + ax - b = 0$ (D) $x^2 - ax - b = 0$

A-4. The intercepts made by the circle $x^2 + y^2 - 5x - 13y - 14 = 0$ on the x-axis and y-axis are respectively
(A) 9, 13 (B) 5, 13 (C*) 9, 15 (D) none
वृत्त $x^2 + y^2 - 5x - 13y - 14 = 0$ द्वारा x-अक्ष और y-अक्ष पर अन्तःखण्ड क्रमशः हैं –
(A) 9, 13 (B) 5, 13 (C) 9, 15 (D) इनमें से कोई नहीं

A-5. Equation of line passing through mid point of intercepts made by circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ on co-ordinate axes is
वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड के मध्य बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण होगा–
(A) $3x + 2y - 12 = 0$ (B) $3x + y - 6 = 0$ (C) $3x + 4y - 12 = 0$ (D*) $3x + 2y - 6 = 0$

A-6. Two thin rods AB & CD of lengths 2a & 2b move along OX & OY respectively, when 'O' is the origin. The equation of the locus of the centre of the circle passing through the extremities of the two rods is:

दो पतली छड़ें AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ 2a और 2b है क्रमशः OX और OY अक्षों के अनुदिश गतिशील है, जबकि O मूलबिन्दु है। दोनों छड़ों के सिरों से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा –

(A) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (B*) $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (C) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (D) $x^2 - y^2 = a^2 + b^2$

A-7. Let A and B be two fixed points then the locus of a point C which moves so that
$(\tan\angle BAC)(\tan\angle ABC)=1,\ 0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2},\ 0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$ is
(A*) Circle (B) pair of straight line (C) A point (D) Straight line
माना A एवं B दो स्थिर बिन्दु है तब बिन्दु C का बिन्दुपथ जबकि बिन्दु C इस प्रकार है कि $(\tan\angle BAC)(\tan\angle ABC)=1,\ 0\ 0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2},\ 0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$ होगा–
(A*) वृत्त (B) सरल रेखा युग्म (C) एक बिन्दु (D) सरल रेखा

A-8. **STATEMENT-1 :** The length of intercept made by the circle $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ on the x-axis is 2.

STATEMENT-2 : $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$ is a circle which passes through origin with centre $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ and radius $\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$

(A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1
(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1
(C*) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false
(D) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

कथन-1 : वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ द्वारा x-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड की लम्बाई 2 है।

कथन-2 : $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$ मूलबिन्दु से गुजरने वाला एक वृत्त है जिसका केन्द्र $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ और त्रिज्या $\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$ है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

Section (B) : Line and circle, tangent, pair of tangent
खण्ड (B) : रेखा एवं वृत्त, स्पर्श रेखा, स्पर्श रेखा युग्म

B-1. Find the co-ordinates of a point p on line $x + y = -13$, nearest to the circle $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$
रेखा $x + y = -13$ पर स्थित बिन्दु P के निर्देशांक जो कि वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$ के निकटतम हो, होगा–
(A*) (– 6, – 7) (B) (– 15, 2) (C) (– 5, – 6) (D) (– 7, – 6)

B-2. The number of tangents that can be drawn from the point (8, 6) to the circle $x^2 + y^2 - 100 = 0$ is
(A) 0 (B*) 1 (C) 2 (D) none
बिन्दु (8, 6) से वृत्त $x^2 + y^2 - 100 = 0$ पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है–
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

B-3. Two lines through (2, 3) from which the circle $x^2 + y^2 = 25$ intercepts chords of length 8 units have equations
(A) $2x + 3y = 13$, $x + 5y = 17$ (B*) $y = 3$, $12x + 5y = 39$
(C) $x = 2$, $9x - 11y = 51$ (D) $y = 0$, $12x + 5y = 39$
बिन्दु (2, 3) से गुजरने वाली उन दो सरल रेखाओं के समीकरण जो वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ पर 8 इकाई लम्बाई के अन्तःखण्ड की जीवा हो, है–
(A) $2x + 3y = 13$, $x + 5y = 17$ (B) $y = 3$, $12x + 5y = 39$
(C) $x = 2$, $9x - 11y = 51$ (D) $y = 0$, $12x + 5y = 39$

B-4. The line $3x + 5y + 9 = 0$ w.r.t. the circle $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ is
(A) chord dividing circumference in 1 : 3 ratio (B*) diameter
(C) tangent (D) outside line
रेखा $3x + 5y + 9 = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ के सापेक्ष हैं –
(A) जीवा जो परिधि को 1 : 3 में विभाजित करता है। (B) व्यास
(C) स्पर्श रेखा (D) वृत्त के बाहर से जाने वाली रेखा

B-5. If one of the diameters of the circle $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ is a chord to the circle with centre (2, 1), then the radius of the circle is
यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ का एक व्यास उस वृत्त की जीवा है जिसका केन्द्र (2, 1) हो, तो वृत्त की त्रिज्या होगी–
(A*) 3 (B) 2 (C) 3/2 (D) 1

B-6. The tangent lines to the circle $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ which are parallel to the line $4x + 3y + 5 = 0$ are given by:
(A) $4x + 3y - 7 = 0,\ 4x + 3y + 15 = 0$ (B*) $4x + 3y - 31 = 0,\ 4x + 3y + 19 = 0$
(C) $4x + 3y - 17 = 0,\ 4x + 3y + 13 = 0$ (D) $4x + 3y - 31 = 0,\ 4x + 3y - 19 = 0$
सरल रेखा $4x + 3y + 5 = 0$ के समान्तर वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण है–
(A) $4x + 3y - 7 = 0,\ 4x + 3y + 15 = 0$ (B) $4x + 3y - 31 = 0,\ 4x + 3y + 19 = 0$
(C) $4x + 3y - 17 = 0,\ 4x + 3y + 13 = 0$ (D) $4x + 3y - 31 = 0,\ 4x + 3y - 19 = 0$

B-7. The condition so that the line $(x + g)\cos\theta + (y + f)\sin\theta = k$ is a tangent to $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is

सरल रेखा $(x + g)\cos\theta + (y + f)\sin\theta = k$ के वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की स्पर्श रेखा होने के लिए प्रतिबन्ध है –
(A*) $g^2 + f^2 = c + k^2$ (B) $g^2 + f^2 = c^2 + k$ (C) $g^2 + f^2 = c^2 + k^2$ (D) $g^2 + f^2 = c + k$

B-8. The tangent to the circle $x^2 + y^2 = 5$ at the point $(1, -2)$ also touches the circle $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ at
वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ के बिन्दु $(1,-2)$ पर स्पर्श रेखा, वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ को भी स्पर्श करता हो, तो स्पर्श बिन्दु है–
(A) $(-2, 1)$ (B) $(-3, 0)$ (C) $(-1, -1)$ (D*) $(3, -1)$

B-9. The angle between the two tangents from the origin to the circle $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ equals
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C*) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
मूल बिन्दु से वृत्त $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण है –
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C*) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

B-10. A point A(2, 1) is outside the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ & AP, AQ are tangents to the circle. The equation of the circle circumscribing the triangle APQ is :
(A*) $(x + g)(x - 2) + (y + f)(y - 1) = 0$ (B) $(x + g)(x - 2) - (y + f)(y - 1) = 0$
(C) $(x - g)(x + 2) + (y - f)(y + 1) = 0$ (D) $(x - g)(x - 2) + (y - f)(y - 1) = 0$
एक बिन्दु A(2, 1) वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बाहर स्थित है तथा AP एवं AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। त्रिभुज APQ के परिवृत्त का समीकरण हैं–
(A) $(x + g)(x - 2) + (y + f)(y - 1) = 0$ (B) $(x + g)(x - 2) - (y + f)(y - 1) = 0$
(C) $(x - g)(x + 2) + (y - f)(y + 1) = 0$ (D) $(x - g)(x - 2) + (y - f)(y - 1) = 0$

B-11. A line segment through a point P cuts a given circle in 2 points A & B, such that PA = 16 & PB = 9, find the length of tangent from points to the circle
(A) 7 (B) 25 (C*) 12 (D) 8
बिन्दु P से गुजरने वाला रेखाखंड दिये गये वृत्त को दो बिन्दुओं A एवं B पर इस प्रकार काटता है कि PA = 16 व PB = 9 हो, तो बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी–
(A) 7 (B) 25 (C*) 12 (D) 8

B-12. The length of the tangent drawn from any point on the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$ to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$ is:
(A*) $\sqrt{q - p}$ (B) $\sqrt{p - q}$ (C) $\sqrt{q + p}$ (D) $\sqrt{2q + p}$
वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$ के किसी बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई है –
(A) $\sqrt{q - p}$ (B) $\sqrt{p - q}$ (C) $\sqrt{q + p}$ (D) $\sqrt{2q + p}$

B-13. The equation of the diameter of the circle $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ which bisects the chord cut off by the circle on the line $x - 2y - 3 = 0$ is
(A) $x + 2y = 0$ (B*) $2x + y - 3 = 0$ (C) $3x + 2y - 4 = 0$ (D) $3x - 2y - 4 = 0$

वृत्त $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ के व्यास का वह समीकरण जो वृत्त द्वारा सरल रेखा $x - 2y - 3 = 0$ पर काटी गई जीवा को समद्विभाजित करता है –

(A) $x + 2y = 0$ (B) $2x + y - 3 = 0$ (C) $3x + 2y - 4 = 0$ (D) $3x - 2y - 4 = 0$

B-14. The locus of the point of intersection of the tangents to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ at points whose parametric angles differ by $\frac{\pi}{3}$ is

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के उन बिन्दुओं जिनके प्राचलिक कोणों का अन्तर $\pi/3$ है, की स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है।

(A*) $x^2 + y^2 = \frac{4a^2}{3}$ (B) $x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{3}$ (C) $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{3}$ (D) $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$

Section (C) : Normal, Director circle, chord of contact, chord with mid point

खण्ड (C) : अभिलम्ब, नियामक वृत्त, स्पर्श जीवा, मध्य बिन्दु वाली जीवा

C-1. The equation of normal to the circle $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ which passes through (1, 1) is

(A*) $3x + y - 4 = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $3x - y - 4 = 0$

वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ के अभिलम्ब का समीकरण जो बिन्दु (1, 1) से गुजरता है –

(A) $3x + y - 4 = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $3x - y - 4 = 0$

C-2. The normal at the point (3, 4) on a circle cuts the circle at the point (–1, –2). Then the equation of the circle is

वृत्त के बिन्दु (3, 4) पर अभिलम्ब वृत्त को बिन्दु (–1, –2) पर काटता हो, तो वृत्त का समीकरण है–

(A) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 13 = 0$ (B*) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 12 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 14 = 0$

C-3. The co-ordinates of the middle point of the chord cut off on $2x - 5y + 18 = 0$ by the circle $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 54 = 0$ are

वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 54 = 0$ द्वारा सरल रेखा $2x - 5y + 18 = 0$ पर काटी गई जीवा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है–

(A*) (1, 4) (B) (2, 4) (C) (4, 1) (D) (1, 1)

C-4. The locus of the mid point of a chord of the circle $x^2 + y^2 = 4$ which subtends a right angle at the origin is:

वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की उस जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु पर समकोण बनातीहो,होगा–

(A) $x + y = 2$ (B) $x^2 + y^2 = 1$ (C*) $x^2 + y^2 = 2$ (D) $x + y = 1$

C-5. The chords of contact of the pair of tangents drawn from each point on the line $2x + y = 4$ to the circle $x^2 + y^2 = 1$ pass through the point

(A) (1, 2) (B*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (C) (2, 4) (D) (4, 4)

सरल रेखा $2x + y = 4$ के प्रत्येक बिन्दु से $x^2 + y^2 = 1$ पर खींचे गये स्पर्शी रेखा युग्म की स्पर्श जीवाएँ जिस बिन्दु से गुजरती हैं, वह है –

(A) (1, 2) (B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (C) (2, 4) (D) (4, 4)

C-6. The locus of the centers of the circles such that the point (2, 3) is the mid point of the chord $5x + 2y = 16$ is:

(A*) $2x - 5y + 11 = 0$ (B) $2x + 5y - 11 = 0$ (C) $2x + 5y + 11 = 0$ (D) $2x - 5y - 11 = 0$

वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ जबकि बिन्दु (2,3) जीवा $5x + 2y = 16$ का मध्य बिन्दु हैं–

(A) $2x - 5y + 11 = 0$ (B) $2x + 5y - 11 = 0$ (C) $2x + 5y + 11 = 0$ (D) $2x - 5y - 11 = 0$

C-7. Find the locus of the mid point of the chord of a circle $x^2 + y^2 = 4$ such that the segment intercepted by the chord on the curve $x^2 - 2x - 2y = 0$ subtends a right angle at the origin.

वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि जीवा द्वारा वक्र $x^2 - 2x - 2y = 0$ पर काटा गया अन्तःखण्ड मूलबिन्दु पर समकोण बनाता हैं।

(A*) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

Section (D) : Position of two circle, Orthogonality, Radical axis and radical centre
खण्ड (D) : दो वृत्तों की स्थिति, लम्बकोणीयता, मूलाक्ष एवं मूलाक्ष केन्द्र

D-1. Number of common tangents of the circles $(x + 2)^2+(y-2)^2 = 49$ and $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ is:

वृत्त $(x + 2)^2+(y-2)^2 = 49$ और $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या हैं–

(A) 0 (B*) 1 (C) 2 (D) 3

D-2. The equation of the common tangent to the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ at their point of contact is
वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ और $x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ के स्पर्श बिन्दु पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –

(A) $12x + 5y + 19 = 0$ (B*) $5x + 12y + 19 = 0$
(C) $5x - 12y + 19 = 0$ (D) $12x - 5y + 19 = 0$

D-3. Equation of the circle cutting orthogonally the three circles $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$ is

(A*) $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 7x + 11y + 6 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 16x - 18y - 4 = 0$

तीन वृत्तों $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$ एवं $x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$ को लम्बकोणीय काटने वाले वृत्त का समीकरण है –

(A) $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 7x + 11y + 6 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 16x - 18y - 4 = 0$

D-4. If the length of a common internal tangent to two circles is 7, and that of a common external tangent is 11, then the product of the radii of the two circles is:
यदि दो वृत्तों की उभयनिष्ठ आन्तरिक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई 7 और उभयनिष्ठ बाह्य स्पर्श रेखा की लम्बाई 11 हो, तो दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं का गुणनफल हैं :

(A*) 18 (B) 20 (C) 16 (D) 12

Section (E) : Family of circles , Locus, Miscellaneous
खण्ड (E) : वृत्त निकाय, बिन्दुपथ, विविध

E-1. The locus of the centre of the circle which bisects the circumferences of the circles $x^2 + y^2 = 4$ & $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ is:

(A*) a straight line (B) a circle (C) a parabola (D) pair of straight line

वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ और $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ की परिधियों को समद्विभाजित करने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है

(A) एक सरल रेखा (B) वृत्त (C) परवलय (D) सरल रेखा युग्म

E-2. Equation of a circle drawn on the chord $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ as its diameter, is
वृत्त का समीकरण होगा जबकि वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की जीवा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ इसका व्यास है।

(A) $(x^2 + y^2 - a^2) - 2p (x\sin\alpha + y\cos\alpha - p) = 0$ (B*) $(x^2 + y^2 - a^2) - 2p (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$
(C) $(x^2 + y^2 - a^2) + 2p (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$ (D) $(x^2 + y^2 - a^2) - p (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = 0$

E-3. Find the equation of the circle which passes through the point (1, 1) & which touches the circle $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ at the point (2, 3) on it.
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,1) से गुजरता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ पर स्थित बिन्दु (2, 3) पर स्पर्श करता है।
(A*) $x^2 + y^2 + x - 6y + 3 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + x - 6y - 3 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + x + 6y + 3 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + x - 3y + 3 = 0$

E-4. Find the equation of circle touching the line $2x + 3y + 1 = 0$ at (1, – 1) and cutting orthogonally the circle having line segment joining (0, 3) and (– 2, – 1) as diameter.
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $2x + 3y + 1 = 0$ को बिन्दु (1, – 1) पर स्पर्श करता हो तथा बिन्दुओं (0, 3) एवं (– 2, – 1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास मानकर बनाये गये वृत्त को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता हो।
(A*) $2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y + 1 = 0$ (B) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 5y + 1 = 0$
(C) $2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y - 1 = 0$ (D) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 5y + 1 = 0$

E-5. Equation of the circle which passes through the point (–1, 2) & touches the circle $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ at origin, is -
वृत्त का समीकरण जो बिन्दु (–1, 2) से गुजरता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है
(A) $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$ (B) $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 2x + \frac{3}{2}y = 0$ (D*) $x^2 + y^2 + 2x - \frac{3}{2}y = 0$

E-6. Two circles are drawn through the point (a, 5a) and (4a, a) to touch the axis of 'y'. They intersect at an angle of θ then $\tan\theta$ is -
(a, 5a) और (4a, a) बिन्दुओं से गुजरने वाले दो वृत्त, 'y' अक्ष को स्पर्श करते है तथा वे θ कोण पर प्रतिच्छेद करते है तब $\tan\theta$ बराबर है –
(A*) $\frac{40}{9}$ (B) $\frac{9}{40}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1.

	Column – I		Column – II	
(A)	Number of values of a for which the common chord of the circles $x^2 + y^2 = 8$ and $(x - a)^2 + y^2 = 8$ subtends a right angle at the origin is	(p)	0
(B)	The number of circles touching all the three lines $3x + 7y = 2$, $21x + 49y = 5$ and $9x + 21y = 0$ are	(q)	2
(C)	The length of common chord of circles $x^2 + y^2 - x - 11y + 18 = 0$ and $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$ is	(r)	5
(D)	Number of common tangents of the circles $x^2 + y^2 - 2x = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ is	(s)	3

Ans. (A) → (q), (B) → (p), (C) → (r), (D) → (s)

	स्तम्भ – I		स्तम्भ – II	
(A)	a के उन मानों की संख्या जिनके लिए वृत्तों $x^2 + y^2 = 8$ तथा $(x - a)^2 + y^2 = 8$ की उभयनिष्ठ जीवा मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरित करती है –	(p)	0	
(B)	सभी तीन रेखाओं $3x + 7y = 2$, $21x + 49y = 5$ तथा $9x + 21y = 0$ को स्पर्श करने वाले वृत्तों की संख्या है –	(r)	2	
(C)	वृत्तों $x^2 + y^2 - x - 11y + 18 = 0$ और $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$ की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई	(r)	5	
(D)	वृत्तों $x^2 + y^2 - 2x = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है	(s)	3	

Ans. (A) → (q), (B) → (p), (C) → (r), (D) → (s)

2.

	Column – I		Column – II	
(A)	If director circle of two given circles C_1 and C_2 of equal radii touches each other, then ratio of length of internal common tangent of C_1 and C_2 to their radii equals to	(p)	13	
(B)	Let two circles having radii r_1 and r_2 are orthogonal to each other. If length of their common chord is k times the square root of hormonic mean between squares of their radii, then k^4 equals to	(q)	7	
(C)	The axes are translated so that the new equation of the circle $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ has no first degree terms and the new equation $x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$, then the value of λ is	(r)	4	
(D)	The number of integral points which lie on or inside the circle $x^2 + y^2 = 4$ is	(s)	2	

Hindi

	स्तम्भ – I		स्तम्भ – II	
(A)	यदि दो दिए गए बराबर त्रिज्या के वृत्तों के नियामक वृत्त एक दुसरे को बाह्य स्पर्श करते है। तब C_1 और C_2 की आन्तरिक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई का उनकी त्रिज्या से अनुपात बराबर है	(p)	13	
(B)	माना दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएं r_1 और r_2 एक दुसरे के लाम्बिक है। यदि उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई उनकी त्रिज्याओं के वर्गो के मध्य हरात्मक माध्य के वर्गमूल का k गुना है तब k^4 बराबर है–	(q)	7	
(C)	अक्षों को इस प्रकार परिवर्तित किया जाता है कि वृत $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ की नई समीकरण में एक घात का कोई पद नहीं होता है तब नया समीकरण $x^2 + y^2 = \frac{\lambda}{4}$ से दी जाती है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।	(r)	4	
(D)	ऐसे पूर्णांक बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के ऊपर या अन्दर स्थित है।	(s)	2	

Ans. (A) → (s), (B) → (r), (C) → (q), (D) → (p)

Exercise-2

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Single choice type
एकल विकल्पी प्रकार

1. If $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(b, \frac{1}{b}\right), \left(c, \frac{1}{c}\right)$ & $\left(d, \frac{1}{d}\right)$ are four distinct points on a circle of radius 4 units, then abcd is equal to:
(A) 4 (B) 16 (C*) 1 (D) 2
यदि 4 इकाई त्रिज्या के वृत्त पर 4 भिन्न बिन्दु $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(b, \frac{1}{b}\right), \left(c, \frac{1}{c}\right)$ और $\left(d, \frac{1}{d}\right)$ और हो, तो abcd बराबर है :
(A) 4 (B) 16 (C) 1 (D) 2

2. From the point A (0, 3) on the circle $x^2 + 4x + (y-3)^2 = 0$ a chord AB is drawn & extended to a point M such that AM = 2 AB. The equation of the locus of M is :
वृत्त $x^2 + 4x + (y-3)^2 = 0$ पर बिन्दु A (0,3) से एक जीवा AB खींची जाती है तथा इसे बिन्दु M तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि AM = 2 AB हो, तो M के बिन्दुपथ का समीकरण है :
(A) $x^2 + 8x + y^2 = 0$ (B*) $x^2 + 8x + (y-3)^2 = 0$
(C) $(x-3)^2 + 8x + y^2 = 0$ (D) $x^2 + 8x + 8y^2 = 0$

3. If tangent at (1, 2) to the circle c_1: $x^2 + y^2 = 5$ intersects the circle c_2: $x^2 + y^2 = 9$ at A & B and tangents at A & B to the second circle meet at point C, then the co–ordinates of C is
यदि बिन्दु (1,2) पर वृत्त c_1: $x^2 + y^2 = 5$ की स्पर्श रेखा, वृत्त c_2: $x^2 + y^2 = 9$ को बिन्दु A और B पर काटती है तथा द्वितीय वृत्त के बिन्दु A और B पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हो, तो C के निर्देशांक है –
(A) (4, 5) (B) $\left(\frac{9}{15}, \frac{18}{5}\right)$ (C) (4, –5) (D*) $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$

4. A circle passes through point $\left(3, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ touches the line pair $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$. Centre of circle lies inside the circle $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 15 = 0$. Co-ordinate of centre of circle is
एक वृत्त बिन्दु $\left(3, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ से गुजरता है तथा रेखा युग्म $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ को स्पर्श करता है। वृत्त का केन्द्र $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 15 = 0$ के अन्दर स्थित हो, तो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक है –
(A*) (4, 0) (B) (5, 0) (C) (6, 0) (D) (0, 4)

5. The length of the tangents from any point on the circle $15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$ to the two circles $5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$ and $5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0$ are in the ratio
(A*) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 2 : 1
वृत्त $15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$ के किसी बिन्दु से दो वृत्त $5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$ और $5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयों का अनुपात हैं
(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 2 : 1

6. The distance between the chords of contact of tangents to the circle; $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ from the origin & the point (g, f) is:

मूलबिन्दु और बिन्दु (g,f) से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर खींचे गए स्पर्शी युग्म की स्पर्शी जीवाओं के बीच की दूरी है –

(A) $\sqrt{g^2 + f^2}$ (B) $\frac{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}{2}$ (C*) $\frac{g^2 + f^2 - c}{2\sqrt{g^2 + f^2}}$ (D) $\frac{\sqrt{g^2 + f^2 + c}}{2\sqrt{g^2 + f^2}}$

7. If from any point P on the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, tangents are drawn to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c\sin^2\alpha + (g^2 + f^2)\cos^2\alpha = 0$, then the angle between the tangents is:

(A) α (B*) 2α (C) $\frac{\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{3}$

यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर स्थित किसी बिन्दु P से वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c\sin^2\alpha + (g^2 + f^2)\cos^2\alpha = 0$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हो, तो स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण है–

(A) α (B) 2α (C) $\frac{\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{3}$

8. The locus of the mid points of the chords of the circle $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ which subtend an angle of $\frac{\pi}{3}$ radians at its circumference is:

वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ की जीवाओं जो इसकी परिधि पर $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का कोण बनाती हो, के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ हैं–

(A) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 6.25$ (B*) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6.25$
(C) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 18.75$ (D) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 18.75$

9. If the two circles, $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ & $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$ touch each other then :

(A) $f_1 g_1 = f_2 g_2$ (B*) $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ (C) $f_1 f_2 = g_1 g_2$ (D) $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$

यदि दो वृत्त $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ एवं $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$ एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो :

(A) $f_1 g_1 = f_2 g_2$ (B) $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ (C) $f_1 f_2 = g_1 g_2$ (D) $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$

10. A circle touches a straight line $\ell x + my + n = 0$ & cuts the circle $x^2 + y^2 = 9$ orthogonally. The locus of centres of such circles is:

(A*) $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$ (B) $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$
(C) $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 + 9)$ (D) $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$

एक वृत्त सरल रेखा $\ell x + my + n = 0$ को स्पर्श करता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ को लम्बकोणीय काटता हो, तो इस प्रकार के वृत्तों के केन्द्र का बिन्दुपथ हैं –

(A*) $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$ (B) $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$
(C) $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 + 9)$ (D) $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$

11. The locus of the point at which two given unequal circles subtend equal angles is:

(A) a straight line (B*) a circle (C) a parabola (D) an ellipse

उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिस पर दो दिये गए असमान वृत्त, समान कोण अन्तरित करते हैं, है–

(A) एक सरल रेखा (B*) एक वृत्त (C) एक परवलय (D) दीर्घवृत्त

12. A circle is given by $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Another circle C touches it externally and also the x-axis, then the locus of its centre is

एक वृत्त का समीकरण $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ है। एक अन्य वृत्त C इसको बाह्य स्पर्श करता हो तथा x-अक्ष को भी स्पर्श करता हो, तो इसके केन्द्र का बिन्दुपथ हैं –

(A) $\{(x, y) : x^2 = 4y\} \cup \{(x, y) : y \le 0\}$
(B) $\{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 4\} \cup \{(x, y) : y \le 0\}$
(C) $\{(x, y) : x^2 = y\} \cup \{(0, y) : y \le 0\}$
(D*) $\{(x, y) : x^2 = 4y\} \cup \{(0, y) : y \le 0\}$

13. The locus of the centre of a circle touching the circle $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 4$ internally and tangent on which from (1, 2) is making a 60° angle with each other.

वृत्त $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 4$ को आन्तरिक स्पर्श करने वाले वृत्त तथा बिन्दु (1, 2) से वृत्त पर खीचीं गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण 60° है, तो वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$
(B*) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
(C) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
(D) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

14. **STATEMENT-1 :** If three circles which are such that their centres are non-collinear, then exactly one circle exists which cuts the three circles orthogonally.

STATEMENT-2 : Radical axis for two intersecting circles is the common chord.

(A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1
(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1
(C) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false
(D*) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

कथन-1 : यदि तीन वृत्त, इस प्रकार है कि उनके केन्द्र असंरेखीय हो, तो तीनों वृत्तों को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करने वाला ठीक एक वृत्त सम्भव है।

कथन-2 : दो प्रतिच्छेदित वृत्तों की मूलाक्ष उनकी उभयनिष्ठ जीवा होती है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

15. The centre of family of circles cutting the family of circles $x^2 + y^2 + 4x\left(\lambda - \frac{3}{2}\right) + 3y\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) - 6(\lambda + 2) = 0$ orthogonally, lies on

वृत्त निकाय का केन्द्र जो कि वृत्त निकाय $x^2 + y^2 + 4x\left(\lambda - \frac{3}{2}\right) + 3y\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) - 6(\lambda + 2) = 0$ को लम्बकोणीय काटता है, पर स्थित होगा–

(A) $x - y - 1 = 0$
(B*) $4x + 3y - 6 = 0$
(C) $4x + 3y + 7 = 0$
(D) $3x - 4y - 1 = 0$

16. The circle $x^2 + y^2 = 4$ cuts the circle $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$ in A & B. Then the equation of the circle on AB as a diameter is:

(A*) $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0$
(B) $9(x^2 + y^2) + 8x - 4y + 25 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 72 = 0$
(D) $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y + 50 = 0$

यदि वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ दूसरे वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$ को बिन्दु A एवं B पर काटता हो, तो AB व्यास वाले वृत्त का समीकरण हैं–

(A) $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0$
(B) $9(x^2 + y^2) + 8x - 4y + 25 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 72 = 0$
(D) $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y + 50 = 0$

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. Find maximum number of points having integer coordinates (both x, y integer) which can lie on a circle with centre at $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ is (are)

पूर्णांक निर्देशांक वाले बिन्दुओं की अधिकतम संख्या होगी (दोनों x, y पूर्णांक है) जो $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ केन्द्र के वृत्तों पर स्थित है:

Ans. 1

2. Find the sum of co-ordinates of the centre of the smallest circle touching the circles $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ and $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$.

वृत्तों $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$ को स्पर्श करने वाले सबसे छोटे वृत्त का केन्द्र के निर्देशांक का योगफल है–

Ans. 7

3. A line meets the co–ordinate axes in A and B. A circle is circumscribed about the triangle OAB. If d_1 and d_2 are the distances of the tangent to the circle at the origin O from the points A and B respectively and diameter of the circle is $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, then find the value of $\lambda_1 + \lambda_2$.

एक रेखा अक्षों को A तथा B पर मिलती है। त्रिभुज OAB पर परिवृत्त बनाया जाता है। यदि मूल बिन्दु O पर खींची गई स्पर्श रेखा की बिन्दुओं A और B से दूरी क्रमशः d_1 और d_2 है तथा वृत्त का व्यास $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, है तब $\lambda_1 + \lambda_2$ का मान है।

Ans. 2

4. A circle is inscribed (i.e. touches all four sides) into a rhombous ABCD with one angle 60º. The distance from the centre of the circle to the nearest vertex is equal to 1. If P is any point of the circle, then $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ is equal to :

एक वृत्त एक समचतुर्भुज ABCD जिसका एक कोण 60º है, में अर्न्तविष्ट है। वृत्त के केन्द्र की समीपवर्ती शीर्ष से दूरी 1 है। यदि वृत्त पर कोई बिन्दु P हो, तो $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ का मान होगा–

Ans. 11

5. Let x & y be the real numbers satisfying the equation $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$. If the maximum and minimum values of $x^2 + y^2$ are M & m respectively, then find the numerical value of (M + m).

माना x और y वास्तविक संख्याएँ समीकरण $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ को सन्तुष्ट करती है। यदि $x^2 + y^2$ का अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः M और m हो, तो M + m का संख्यात्मक मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 10

6. Find number of values of 'c' for which the set,
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x \le 1\} \cap \{(x, y) \mid x - y + c \ge 0\}$ contains only one point is common.

c के मानों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके लिए समुच्चय
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x \le 1\} \cap \{(x, y) \mid x - y + c \ge 0\}$ में केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु रखता है

Ans. 1

7. A rhombus is inscribed in the region common to the two circles $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ and $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ with two of its vertices on the line joining the centres of the circles and the area of the rhombus is $a\sqrt{3}$ sq. units, then find the value of a.

दो वृत्तो $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ और $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ के उभयनिष्ठ क्षेत्र में एक समचतुर्भुज जिसके दो शीर्ष वृत्त के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है, बनाया जाता है तथा समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $a\sqrt{3}$ वर्ग इकाई हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 8

8. If (α, β) is a point on the circle whose centre is on the x-axis and which touches the line $x + y = 0$ at (2, –2), then find the greatest integral value of 'α'.
यदि वृत्त जिसका केन्द्र x-अक्ष पर स्थित हो, पर स्थित एक बिन्दु (α, β) है तथा जो रेखा $x + y = 0$ को (2, –2) बिन्दु पर स्पर्श करता हो, तो α का अधिकतम पूर्णांक मान होगा–
Ans. 6

9. Two circles whose radii are equal to 4 and 8 intersect at right angles. The length of their common chord is $\frac{\lambda}{\sqrt{5}}$, then find λ

दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4 और 8 हो, समकोण पर प्रतिच्छेद करते है। उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\frac{\lambda}{\sqrt{5}}$ हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।
Ans. 16

10. A variable circle passes through the point A (a, b) & touches the x–axis and the locus of the other end of the diameter through A is $(x - a)^2 = \lambda by$, then find the value of λ

एक चर वृत्त बिन्दु A (a, b) से गुजरता है तथा x–अक्ष को स्पर्श करता है। A से गुजरने वाले व्यास के दूसरे सिरे का बिन्दुपथ $(x - a)^2 = \lambda by$ हो, तो λ का मान ज्ञात कीजिये।
Ans. 4

11. Let A be the centre of the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Suppose that the tangents at the points B (1, 7) & D (4, – 2) on the circle meet at the point C. Find the area of the quadrilateral ABCD.
माना वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ का केन्द्र A है। माना वृत्त के बिन्दुओं B (1, 7) तथा D (4, – 2) पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हो, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
Ans. 75

12. Find the greatest integer values of a for which the point (2a, a + 1) is an interior point of the larger segment of the circle $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ made by the chord whose equation is $x - y + 1 = 0$.
जीवा $x - y + 1 = 0$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ को विभाजित करने पर बनने वाले बड़े वृत्त खण्ड (Larger segment) में बिन्दु (2a, a + 1) के होने के लिए a का अधिकतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।
Ans. 1

13. The circles $x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0$ and $x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$ intersect in two distinct points P and Q, then find the number of values of 'a' for which the line $5x + by - a = 0$ passes through P and Q.

यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$ दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं P तथा Q पर काटते हो, तो a के मानों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखा $5x + by - a = 0$ बिन्दु P तथा Q से गुजरती है

Ans. 0

14. The circumference of the circle $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$ is bisected by the circle $x^2 + y^2 + 4x + 12y + p = 0$, then find p + q
वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$ की परिधि को वृत्त $x^2 + y^2 + 4x + 12y + p = 0$ समद्विभाजित करता हो, तो p + q का मान ज्ञात कीजिए।
Ans. 10

15. A circle touches the line y = x at a point P such that $OP = 4\sqrt{2}$ where O is the origin. The circle contains the point (–10, 2) in its interior and the length of its chord on the line $x + y = 0$ is $6\sqrt{2}$. If the equation of the circle $x^2 + y^2 + 2g x + 2fy + c = 0$, then $\frac{g+c+f}{10}$ equals to

Ans. 4

एक वृत्त सरल रेखा $y = x$ को बिन्दु P पर इस प्रकार स्पर्श करता है कि $OP = 4\sqrt{2}$ जहाँ O मूलबिन्दु है। (–10, 2) वृत्त के अन्दर कोई बिन्दु है तथा सरल रेखा $x + y = 0$ पर वृत्त की जीवा की लम्बाई $6\sqrt{2}$ है। यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, तब $\frac{g+c+f}{10}$ बराबर है।

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. The equation of circles passing through (3, –6) touching both the axes is

बिन्दु (3, –6) से गुजरने वाले तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण हैं –

(A*) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$ (D*) $x^2 + y^2 - 30x + 30y + 225 = 0$

2. Equations of circles which pass through the points (1, –2) and (3, – 4) and touch the x-axis is

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ (B*) $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$
(C*) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 10x + 20y - 25 = 0$

बिन्दुओं (1, –2) एवं (3, – 4) से गुजरने वाले एवं x-अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है–

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 10x + 20y - 25 = 0$

3. The centre of a circle passing through the points (0, 0), (1, 0) & touching the circle $x^2 + y^2 = 9$ is :

वृत्त जो कि बिन्दुओं (0, 0), (1, 0) से गुजरता हो तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ को स्पर्श करता हो, का केन्द्र है–

(A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (B*) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D*) $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

4. The equation of the circle which touches both the axes and the line $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ and lies in the first quadrant is $(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$ where c is

प्रथम चतुर्थांश में दोनों अक्षों तथा सरल रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण $(x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$ है, तो c का मान होगा–

(A*) 1 (B) 2 (C) 4 (D*) 6

5. Find the equations of straight lines which pass through the intersection of the lines $x - 2y - 5 = 0$, $7x + y = 50$ & divide the circumference of the circle $x^2 + y^2 = 100$ into two arcs whose lengths are in the ratio 2 : 1.

सरल रेखाओं $x - 2y - 5 = 0$ और $7x + y = 50$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली उन सरल रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 = 100$ की परिधि को दो चापों जिनकी लम्बाइयों के अनुपात 2 : 1 हो, में विभाजित करता है।

(A) $3x - 4y - 25 = 0$ (B) $4x + 3y - 25 = 0$
(C*) $4x - 3y - 25 = 0$ (D*) $3x + 4y - 25 = 0$

6. Tangents are drawn to the circle $x^2 + y^2 = 50$ from a point 'P' lying on the x-axis. These tangents meet the y-axis at points 'P_1' and 'P_2'. Possible coordinates of 'P' so that area of triangle PP_1P_2 is minimum, is/are

x- अक्ष पर स्थित बिन्दु 'P' से वृत्त $x^2 + y^2 = 50$ की स्पर्श रेखाऐं खीचीं जाती है। ये स्पर्श रेखाऐं y-अक्ष को 'P_1' तथा 'P_2' पर मिलती है। संभावित 'P' के निर्देशांक होगें जबकि त्रिभुज PP_1P_2 का क्षेत्रफल न्यूनतम है

(A*) (10, 0) (B) $(10\sqrt{2}, 0)$ (C*) (–10, 0) (D) $(-10\sqrt{2}, 0)$

7. If (a, 0) is a point on a diameter segment of the circle $x^2 + y^2 = 4$, then $x^2 - 4x - a^2 = 0$ has
(A*) exactly one real root in (– 1, 0] (B*) Exactly one real root in [2, 5]
(C*) distinct roots greater than-1 (D*) Distinct roots less than 5
यदि (a, 0) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के व्यास पर एक बिन्दु है तब $x^2 - 4x - a^2 = 0$ रखता है
(A*) (– 1, 0] मेंठीक एक वास्तविक मूल रखता है। (B*) [2, 5] में ठीक एक वास्तविक मूल रखता है।
(C*) असमान मूल –1 से बड़े है। (D*) भिन्न–भिन्न मूल 5 से कम है।

8. The tangents drawn from the origin to the circle $x^2 + y^2 - 2rx - 2hy + h^2 = 0$ are perpendicular if
वृत्त $x^2 + y^2 - 2rx - 2hy + h^2 = 0$ की मूल बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाऐं लम्बवत् है यदि
(A*) h = r (B*) h = – r (C) $r^2 + h^2 = 1$ (D*) $r^2 = h^2$

9. The equation (s) of the tangent at the point (0, 0) to the circle where circle makes intercepts of length 2a and 2b units on the coordinate axes, is (are) -
वृत्त के (0, 0) पर स्पर्शरेखा का समीकरण होगा जहाँ वृत्त निर्देशांक अक्षों पर 2a तथा 2b लम्बाई का अन्तखण्ड काटता है–
(A*) ax + by = 0 (B*) ax – by = 0 (C) x = y (D) bx + ay = ab

10. Consider two circles $C_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ and $C_2 : x^2 + y^2 - 2 = 0$. Let A(1,0) be a fixed point on the circle C_1 and B be any variable point on the circle C_2. The line BA meets the curve C_2 again at C. Which of the following alternative(s) is/are correct ?
(A*) $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$, where O is the origin.
(B) $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [4, 7]$, where O is the origin.
(C*) Locus of midpoint of AB is a circle of radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(D*) Locus of midpoint of AB is a circle of area $\frac{\pi}{2}$.
माना कि वृत्त $C_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ और $C_2 : x^2 + y^2 - 2 = 0$ है। माना A(1,0) वृत्त C_1 पर एक स्थिर बिन्दु है तथा वृत्त C_2 पर एक चर बिन्दु B है तथा रेखा BA, वक्र C_2 को पुनः C पर मिलता है। निम्न में से कौनसा विकल्प सही है ?
(A*) $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
(B) $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [4, 7]$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
(C*) AB के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ, त्रिज्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ का एक वृत्त है।
(D*) AB के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ, $\frac{\pi}{2}$ क्षेत्रफल का एक वृत्त है।

11. One of the diameter of the circle circumscribing the rectangle ABCD is $x - 3y + 1 = 0$.
If two verticles of rectangle are the points (– 2, 5) and (6, 5) respectively, then which of the following hold(s) good?
(A*) Area of rectangle ABCD is 64 square units.
(B*) Centre of circle is (2, 1)
(C*) The other two vertices of the rectangle are (– 2, – 3) and (6, – 3)
(D) Equation of sides are x = – 2, y = – 3, x = 5 and y = 6.
आयत ABCD के परिगत वृत्त का एक व्यास $x - 3y + 1 = 0$ है।
यदि आयत के दो शीर्ष (– 2, 5) और (6, 5) क्रमशः है तब निम्न में से कौनसा सही है।
(A*) आयत ABCD का क्षेत्रफल 64 वर्ग इकाई है।
(B*) वृत्त का केन्द्र (2, 1) है।
(C*) आयत के अन्य दो शीर्ष (– 2, – 3) और (6, – 3) है।
(D) भुजाओं के समीकरण x = – 2, y = – 3, x = 5 और y = 6. है।

12. Three concentric circles of which the biggest is $x^2 + y^2 = 1$, have their radii in A.P. If the line $y = x + 1$ cuts all the circles in real and distinct points. The permissible values of common difference of A.P. is/are

तीन संकेन्द्रीय वृत्त जिसमें सबसे बड़ा $x^2 + y^2 = 1$ है, इनकी त्रिज्यायें समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि रेखा $y = x + 1$ वृत्तों को वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो, तो समान्तर श्रेढ़ी के सार्वअन्तर के संभावित मान है–

(A) 0.4 (B) 0.6 (C*) 0.01 (D*) 0.1

13. If $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0$. Prove that $\ell x + my + 1 = 0$ touches a definite circle, then which of the following is/are true.

(A) Centre (0, 3) (B*) centre (3, 0) (C*) Radius $\sqrt{5}$ (D) Radius 5

यदि $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $\ell x + my + 1 = 0$ एक निश्चित वृत्त को स्पर्श करती है। इस वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(A) केन्द्र (0, 3) (B*) केन्द्र (3, 0) (C*) त्रिज्या $\sqrt{5}$ (D) त्रिज्या 5

14. If the circle C_1: $x^2 + y^2 = 16$ intersects another circle C_2 of radius 5 in such a manner that the common chord is of maximum length and has a slope equal to 3/4, then the co–ordinates of the centre of C_2 are:

यदि वृत्त C_1: $x^2 + y^2 = 16$, 5 इकाई त्रिज्या के दूसरे वृत्त C_2 को इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि इनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई अधिकतम तथा प्रवणता 3/4 हो, तो C_2 के केन्द्र के निर्देशांक हैं–

(A) $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ (B*) $\left(\frac{9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{-9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$ (D*) $\left(\frac{-9}{5}, \frac{+12}{5}\right)$

15. For the circles $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 89 - r^2 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$ which of the following is/are true.

(A*) Number of integral values of r are 14 for which circles are intersecting.
(B) Number of integral values of r are 9 for which circles are intersecting.
(C*) For r equal to 13 number of common tangents are 3.
(D) For r equal to 21 number of common tangents are 2.

वृत्तों $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 89 - r^2 = 0$ और $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$ के लिए, निम्न में से कौनसा/कौनसे सही है?

(A*) r के पूर्णांक मानों की संख्या 14 है जो वृत्तों को प्रतिच्छेद करती है।
(B) r के पूर्णांक मानों की संख्या 9 है जो वृत्तों को प्रतिच्छेद करती है।
(C*) r =13 के लिए उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या 3 है।
(D) r = 21 के लिए उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या 2 है।

16. Which of the following statement(s) is/are correct with respect to the circles $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ and $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$?

(A*) S_1 and S_2 intersect at an angle of 90°.

(B) The point of intersection of the two circle are (2, 0) and $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

(C*) Length of the common of chord of S_1 and S_2 is $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

(D*) The point (2, 3) lies outside the circles S_1 and S_2.

वृत्त $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ और $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ के सापेक्ष निम्न में से कौनसे कथन सही है ?

(A*) S_1 और S_2, 90° कोण पर प्रतिच्छेद करते है।

(B) दो वृत्त का प्रतिच्छेदन बिन्दु (2, 0) और $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ है।

(C*) S_1 तथा S_2 की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\frac{4}{\sqrt{5}}$ है।

(D*) बिन्दु (2, 3) की वृत्त S_1 तथा S_2 के बाहर स्थित है।

17. Two circles, each of radius 5 units, touch each other at (1, 2). If the equation of their common tangent is $4x + 3y = 10$. The equations of the circles are
5 इकाई त्रिज्या के दो वृत्त एक दूसरे को (1, 2) पर स्पर्श करते हैं। यदि उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा $4x + 3y = 10$ है। वृत्तों के समीकरण है –

(A*) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$
(B*) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$

18. $x^2 + y^2 = a^2$ and $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2$ are two equal circles touching each other. Find the equation of circle (or circles) of the same radius touching both the circles.
$x^2 + y^2 = a^2$ और $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2$ दो बराबर वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते है। समान त्रिज्या का वृत्त (या वृत्तों) के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो दोनों वृत्त को स्पर्श करता है

(A) $x^2 + y^2 + 2ax + 2\sqrt{3}\,ay + 3a^2 = 0$
(B*) $x^2 + y^2 - 2ax + 2\sqrt{3}\,ay + 3a^2 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 2ax - 2\sqrt{3}\,ay + 3a^2 = 0$
(D*) $x^2 + y^2 - 2ax - 2\sqrt{3}\,ay + 3a^2 = 0$

19. The circle $x^2 + y^2 - 2x - 3ky - 2 = 0$ passes through two fixed points, (k is the parameter)
वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 3ky - 2 = 0$ जिन दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरता है, वह हैं (k एक प्राचल है) –

(A*) $\left(1 + \sqrt{3}, 0\right)$
(B) $\left(-1 + \sqrt{3}, 0\right)$
(C) $\left(-\sqrt{3} - 1, 0\right)$
(D*) $\left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$

20. Curves $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$ and $a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c = 0$ intersect at four concyclic point A, B, C and D. If P is the point $\left(\frac{g'+g}{a'+a}, \frac{f'+f}{a'+a}\right)$, then which of the following is/are true

(A) P is also concyclic with points A,B,C,D
(B*) PA, PB, PC in G.P.
(C*) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PD^2$
(D*) PA, PB, PC in A.P.

वक्र $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$ और $a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c = 0$ चार समवृत्तीय बिन्दुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करते है। यदि P एक बिन्दु $\left(\frac{g'+g}{a'+a}, \frac{f'+f}{a'+a}\right)$ तब निम्न में से कौनसा सही है?

(A) P बिन्दु A,B,C,D के साथ समवृत्तीय है।
(B*) PA, PB, PC गुणोत्तर श्रेणी में है।
(C*) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PD^2$
(D*) PA, PB, PC समान्तर श्रेणी में है।

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1 (Q. No. 1 to 3)

Let S_1, S_2, S_3 be the circles $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - x + 6y + 5 = 0$ and $x^2 + y^2 + 5x - 8y + 15 = 0$, then

अनुच्छेद # 1 (Q. No. 1 to 3)

मानाकि S_1, S_2, S_3 तीन वृत्त क्रमशः $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - x + 6y + 5 = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 5x - 8y + 15 = 0$ हो, तो

1. Point from which length of tangents to these three circles is same is
वह बिन्दु जिससे तीनों वृत्तों पर स्पर्श रेखा की लम्बाई बराबर हो, होगा–

(A) (1, 0)
(B*) (3, 2)
(C) (10, 5)
(D) (– 2, 1)

$4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2 \qquad x = 3$

2. Equation of circle S_4 which cut orthogonally to all given circle is
वृत्त S_4 जो कि दिये गये वृत्तों को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता है, का समीकरण है–
(A) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 14 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 14 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 14 = 0$ (D*) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 14 = 0$

3. Radical centre of circles S_1, S_2, & S_4 is
S_1, S_2 एवं S_4 वृत्तों का मूलाक्ष है–
(A*) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ (B) (3, 2) (C) (1, 0) (D) $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}\right)$

Comprehension # 2 (Q. No. 4 to 6)
अनुच्छेद # 2

Two circles are
$S_1 \equiv (x + 3)^2 + y^2 = 9$
$S_2 \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 16$
with centres C_1 & C_2
दो वृत्त
$S_1 \equiv (x + 3)^2 + y^2 = 9$
$S_2 \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 16$
जिनके केन्द्र C_1 व C_2 है।

4. A direct common tangent is drawn from a point P (on x-axis) which touches S_1 & S_2 at Q & R, respectively. Find the ratio of area of ΔPQC_1 & ΔPRC_2.
बिन्दु P जो x-अक्ष पर है, से अनुक्रम स्पर्श रेखा जो कि वृत्त S_1 व S_2 को क्रमशः Q व R पर स्पर्श करती है। ΔPQC_1 व ΔPRC_2 के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा–
(A) 3 : 4 (B*) 9 : 16 (C) 16 : 9 (D) 4 : 3

5. From point 'A' on S_2 which is nearest to C_1, a variable chord is drawn to S_1. The locus of mid point of the chord.
(A) circle (B) Diameter of s_1 (C*) Arc of a circle (D) chord of s_1 but not diameter
वृत्त S_2 पर C_1 के निकटतम बिन्दु A से एक चर जीवा S_1 पर बनायी जाती है। जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ होगा–
(A) वृत्त (B) S_1 का व्यास (C*) वृत्त का चाप (D) S_1 की जीवा परन्तु व्यास नहीं

6. Locus obtained in question 5 cuts the circle S_1 at B & C, then line segment BC subtends an angle on the major arc of circle S_1 is
प्रश्न संख्या 7 का बिन्दुपथ, वृत्त S_1 को B एवं C पर काटता हो, तो BC रेखाखंड वृत्त S_1 के दीर्घ चाप पर कोण अंतरित करता है–
(A*) $\cos^{-1}\frac{3}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{4}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}\cot^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

Exercise-3

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1. Tangents drawn from the point P(1, 8) to the circle $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 11 = 0$ touch the circle at the points A and B. The equation of the circumcircle of the triangle PAB is
[IIT-JEE - 2009, Paper-1, (3, –1), 80]
बिन्दु P(1, 8) से वृत्त $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 11 = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ वृत्त को बिन्दुओं A एवं B पर स्पर्श करती हो, तो त्रिभुज PAB के परिवृत्त का समीकरण है– **[IIT-JEE - 2009, Paper-1, (3, –1), 80]**
(A) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 19 = 0$
(B*) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 29 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 19 = 0$

2.✍ The centres of two circles C_1 and C_2 each of unit radius are at a distance of 6 units from each other. Let P be the mid point of the line segment joining the centres of C_1 and C_2 and C be a circle touching circles C_1 and C_2 externally. If a common tangent to C_1 and C passing through P is also a common tangent to C_2 and C, then the radius of the circle C is
[IIT-JEE-2009, Paper-2, (4, –1), 80]
इकाई त्रिज्या वाले दो वृत्तों C_1 तथा C_2 के केन्द्र एक दूसरे से 6 इकाई दूरी पर हैं। माना कि C_1 तथा C_2 के केन्द्रों को मिलाने वाले रेखा–खण्ड का मध्य बिन्दु P है एवं C_1 तथा C_2 वृत्तों को बाहयतः स्पर्श करने वाला एक वृत्त C है। यदि P से जाने वाली C_1 तथा C की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा, C_2 तथा C की भी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा हो, तब वृत्त C की त्रिज्या है। **[IIT-JEE - 2009, Paper-2, (4, –1), 80]**

Ans. 8

3. Two parallel chords of a circle of radius 2 are at a distance $\sqrt{3}+1$ apart. If the chords subtend at the center, angles of $\frac{\pi}{k}$ and $\frac{2\pi}{k}$, where k > 0, then the value of [k] is
[**Note** : [k] denotes the largest integer less than or equal to k]
एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2 है, की दो समानान्तर जीवाओं के बीच की दूरी $\sqrt{3}+1$ है। यदि जीवाएँ केन्द्र पर $\frac{\pi}{k}$ तथा $\frac{2\pi}{k}$, k > 0 के कोण अन्तरित (subtend) करती हैं, तो [k] का मान है।
[IIT-JEE - 2010, Paper-2, (3, 0), 79]
[**नोट** : [k] अधिकतम पूर्णांक जो k से कम या समान है।]
Ans. 3

4. The circle passing through the point (–1, 0) and touching the y-axis at (0, 2) also passes through the point
बिन्दु (–1, 0) से होकर जाने वाला और y-अक्ष को (0, 2) पर स्पर्श करने वाला वृत्त निम्न बिन्दु से भी होकर जाता है
(A) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
(B) $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$
(C) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
(D) (–4, 0)
[IIT-JEE 2011, Paper-2, (3, –1), 80]

Ans. **(D)**

5. The straight line $2x - 3y = 1$ divides the circular region $x^2 + y^2 \le 6$ into two parts.
If $S = \left\{\left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)\right\}$, **[IIT-JEE 2011, Paper-2, (4, 0), 80]**
then the number of point(s) in S lying inside the smaller part is
रेखा $2x - 3y = 1$, वृत्तीय क्षेत्र $x^2 + y^2 \le 6$ को दो भागों में विभाजित करती है। यदि
$S = \left\{\left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)\right\}$,
तो S में स्थित उन बिन्दुओं की संख्या जो लघुतर भाग में अन्दर है, निम्न है–
Ans. 2

6. The locus of the mid-point of the chord of contact of tangents drawn from points lying on the straight line $4x - 5y = 20$ to the circle $x^2 + y^2 = 9$ is **[IIT-JEE 2012, Paper-1, (3, –1), 70]**
सरल रेखा $4x - 5y = 20$ के बिन्दुओं से वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा (chord of contact) के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ (locus) निम्न है
(A*) $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$
(B) $20(x^2 + y^2) + 36x - 45y = 0$
(C) $36(x^2 + y^2) - 20x + 45y = 0$
(D) $36(x^2 + y^2) + 20x - 45y = 0$

Paragraph for Question Nos. 7 to 8
प्रश्न 7 से 8 के लिए अनुच्छेद

A tangent PT is drawn to the circle $x^2 + y^2 = 4$ at the point $P(\sqrt{3}, 1)$. A straight line L, perpendicular to PT is a tangent to the circle $(x - 3)^2 + y^2 = 1$. **[IIT-JEE 2012, Paper-2, (3, –1), 66]**
स्पर्श–रेखा PT वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ को बिन्दु $P(\sqrt{3}, 1)$ पर स्पर्श करती है। सरल रेखा L, PT के लम्बवत् है और वृत्त $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ की स्पर्श–रेखा है।

7. A common tangent of the two circles is
दोनों वृत्तो की एक उभयनिष्ठ स्पर्श–रेखा (common tangent) निम्न है
(A) $x = 4$
(B) $y = 2$
(C) $x + \sqrt{3}\, y = 4$
(D*) $x + 2\sqrt{3}\, y = 6$
Ans. **(D)**

8. A possible equation of L is
L का एक सम्भावित समीकरण निम्न है –
(A*) $x - \sqrt{3}\, y = 1$
(B) $x + \sqrt{3}\, y = 1$
(C) $x - \sqrt{3}\, y = -1$
(D) $x + \sqrt{3}\, y = 5$

9.* Circle(s) touching x-axis at a distance 3 from the origin and having an intercept of length $2\sqrt{7}$ on y-axis is (are) **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**
x-अक्ष को मूलबिन्दु से 3 दूरी पर स्पर्श करने वाला (वाले) तथा y-अक्ष $2\sqrt{7}$ पर अन्तःखण्ड बनाने वाला (वाले) वृत्त है (हैं) **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60]**
(A*) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 6x + 7y + 9 = 0$
(C*) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 6x - 7y + 9 = 0$

10.* A circle S passes through the point (0, 1) and is orthogonal to the circles $(x - 1)^2 + y^2 = 16$ and $x^2 + y^2 = 1$. Then **[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]**
(A) radius of S is 8
(B*) radius of S is 7
(C*) centre of S is (–7, 1)
(D) centre of S is (–8, 1)
एक वृत्त S बिन्दु (0, 1) से गुजरता है तथा वृत्तों $(x - 1)^2 + y^2 = 16$ एवं $x^2 + y^2 = 1$ के लम्बकोणीय (orthogonal) है, तब
(A) S की त्रिज्या (radius) 8 है।
(B*) S की त्रिज्या 7 है।
(C*) S का केन्द्र (–7, 1) है।
(D) S का केन्द्र (–8, 1) है।

11. The circle $C_1 : x^2 + y^2 = 3$, with centre at O, intersects the parabola $x^2 = 2y$ at the point P in the first quadrant. Let the tangent to the circle C_1 at P touches other two circles C_2 and C_3 at R_2 and R_3, respectively. Suppose C_2 and C_3 have equal radii $2\sqrt{3}$ and centres Q_2 and Q_3, respectively. If Q_2 and Q_3 lie on the y-axis, then **[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (4, –2)/62]**

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) area of the triangle OR_2R_3 is $6\sqrt{2}$ (D) area of the triangle PQ_2Q_3 is $4\sqrt{2}$

वत्त $C_1 : x^2 + y^2 = 3$, जिसका केन्द्रबिन्दु O है, परवलय (parabola) $x^2 = 2y$ को प्रथम चतुर्थां (first quadrant) में बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित (intersect) करता है। माना कि वत्त C_1 के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्शरेखा (tangent) अन्य दो वत्तों C_2 और C_3 को क्रमाः बिन्दुओं R_2 तथा R_3 पर स्पर्श करती हैं। मान लीजिये कि C_2 तथा C_3 दोनों की त्रिज्याए 2के बराबर है और उनके केन्द्र बिन्दु क्रमाः Q_2 तथा Q_3 हैं। यदि Q_2 तथा Q_3 y-अक्ष पर स्थित है, तब

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) त्रिभुज OR_2R_3 का क्षेत्रफल $6\sqrt{2}$ है (D) त्रिभुज PQ_2Q_3 का क्षेत्रफल $4\sqrt{2}$ है

Ans. **(A,B,C)**

12. Let RS be the diameter of the circle $x^2 + y^2 = 1$, where S is the point (1, 0). Let P be a variable point (other than R and S) on the circle and tangents to the circle at S and P meet at the point Q. The normal to the circle at P intersects a line drawn through Q parallel to RS at point E. Then the locus of E passes through the point(s) **[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (4, –2)/62]**

माना कि RS वत्त $x^2 + y^2 = 1$ का व्यास (diameter) है, जहाँ कि S बिन्दु (1, 0) है। माना कि P (R और S से भिन्न) वत्त पर एक चर (variable) बिन्दु है और वत्त पर बिन्दुओं S और P पर खींची गई स्पर्शरेखाएँ (tangents) बिन्दु Q पर मिलती है। वत्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब (normal) उस रेखा को, जो Q से गुजरती है तथा RS के समानान्तर (parallel) है, बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करता है। तब E का बिन्दुपथ (locus) निम्न बिन्दु(ओं) से गुजरता है–

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

Ans. **(A,C)**

13. For how many values of p, the circle $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ and the coordinate axes have exactly three common points? **[JEE(Advanced) 2017, Paper-1,(3, 0)/61]**

p के कितने मानों के लिये वृत्त (circle) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ एवम् निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) में केवल तीन बिन्दु उभयनिष्ठ (common) है?

Ans. **(2)**

PARAGRAPH "X" अनुच्छेद "X" **[JEE(Advanced) 2018, Paper-1, (3, –1)/60]**

Let S be the circle in the xy-plane defined by the equation $x^2 + y^2 = 4$.

(***There are two questions based on PARAGRAPH "X", the question given below is one of them***)

मानकि S एक वृत्त (circle) है जो xy-समतल (plane) में समीकरण (equation) $x^2 + y^2 = 4$ के द्वारा परिभाषित है।

(अनुच्छेद "X" पर दो प्रशन आधारित है, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

14. Let E_1E_2 and F_1F_2 be the chords of S passing through the point $P_0(1, 1)$ and parallel to the x-axis and the y-axis, respectively. Let G_1G_2 be the chord of S passing through P_0 and having slope –1. Let the tangents to S at E_1 and E_2 meet at E_3, the tangents to S at F_1 and F_2 meet at F_3, and the tangents to S at G_1 and G_2 meet at G_3. Then, then, the points E_3, F_3, and G_3 lie on the curve **[Circle]**

माना कि E_1E_2 और F_1F_2 वृत्त S की ऐसी जीवाएं (chords) है जो बिन्दु $P_0(1, 1)$ से गुजरती है और क्रमशः x-अक्ष (axis) व y-अक्ष के समान्तर (parallel) है। मानाकि G_1G_2 , S की वह जीवा है जो P_0 से गुजरती है और जिसकी प्रवणता (slope) –1 है। मानाकि E_1 और E_2 पर S की स्पर्शियां (tangents) E_3 पर मिलती है, F_1 और F_2 पर S की स्पर्शियां F_3 पर मिलती है, तथा G_1 और G_2 पर S की स्पर्शियां G_3 पर मिलती है। तब वह वक्र (curve) जिस पर बिन्दु E_3, F_3 और G_3 स्थित है, हैं

(A) $x + y = 4$ (B) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$ (C) $(x - 4)(y - 4) = 4$ (D) $xy = 4$

Ans. **(A)**

15. Let P be a point on the circle S with both coordinates being positive. Let the tangent to S at P intersect the coordinate axes at the points M and N. Then, the mid-point of the line segment MN must lie on the curve **[Circle]**

मानाकि P वृत्त S पर स्थित एक ऐसा बिन्दु है जिसके दोनों निर्देशांक (coordinates) धनात्मक (positive) है। मानाकि वृत्त S के बिन्दु P पर स्पर्शी (tangent) निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) को बिन्दुओं M और N पर प्रतिच्छेद (intersects) करती है। तब वह वक्र (curve) जिस पर रेखाखण्ड (line segment) MN का मध्य बिन्दु (mid-point) अनिवार्य रूप से स्थित है, हैं

(A) $(x + y)^2 = 3xy$ (B) $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{4/3}$
(C) $x^2 + y^2 = 2xy$ (D) $x^2 + y^2 = x^2y^2$

Ans. **(D)**

16. Let T be the line passing through the points P(–2, 7) and Q(2, –5). Let F_1 be the set of all pairs of circles (S_1, S_2) such that T is tangent to S_1 at P and tangent to S_2 at Q, and also such that S_1 and S_2 touch each other at a point, say, M. Let E_1 be the set representing the locus of M as the pair (S_1, S_2) varies in F_1. Let the set of all straight line segments joining a pair of distinct points of E_1 and passing through the point R(1, 1) be F_2. Let E_2 be the set of the mid-points of the line segments in the set F_2. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE **[JEE(Advanced) 2018, Paper-2, (4, –2)/60]**

(A) The point (–2, 7) lies in E_1

(B) The point $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$ does **NOT** lie in E_2 **[Circle]**

(C) The point $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ lies in E_2

(D) The point $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ does **NOT** lie in E_1

माना कि T, बिन्दुओं P(–2, 7) और Q(2, –5) से गुजरने वाली रेखा (line) है। माना कि F_1 उन सभी वृत्त युग्मो (pairs of circles) (S_1, S_2) का समुच्चय (set) है कि रेखा T, S_1 के बिन्दु P पर और S_2 के बिन्दु Q पर स्पर्शी (tangent) है तथा वृत्त S_1 व S_2 एक दूसरे को बिन्दु, माना कि M, पर स्पर्श करते हैं। जब युग्म (S_1, S_2), F_1 में विचरित (varies)

करता है तो माना कि समुच्चय (set) E_1, बिन्दु M के बिन्दुपथ (locus) को दर्शाता है। माना कि F_2 उन सरल रेखा-खण्डो (straight line segments) का समुच्चय है, जो बिन्दु R(1, 1) से गुजरती है तथा E_1 के दो भिन्न बिन्दुओं के युग्म (pair of distinct points) को जोडती हैं माना कि E_2, समुच्चय F_2 के रेखाखण्डों के मध्य बिन्दुओं का समुच्चय है। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (है) ?

(A) बिन्दु (–2, 7) समुच्चय E_1 में स्थित है।
(B) बिन्दु $\left(\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$ समुच्चय E_2 में स्थित **नही** है।
(C) बिन्दु $\left(\frac{1}{2},1\right)$ समुच्चय E_2 में स्थित है।
(D) बिन्दु $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ समुच्चय E_1 में स्थित **नही** है।

Ans. **(BD)**

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. If P and Q are the points of intersection of the circles $x^2 + y^2 + 3x + 7y + 2p - 5 = 0$ and $x^2 + y^2 + 2x + 2y - p^2 = 0$, then there is a circle passing through P, Q and (1, 1) for :
[AIEEE 2009, (4, –1), 144]
(Revision Planner)

(1*) all except one value of p
(2) all except two values of p
(3) exactly one value of p
(4) all values of p

यदि वृत्तों $x^2 + y^2 + 3x + 7y + 2p - 5 = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 2x + 2y - p^2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु P एवं Q हो, तो P, Q और (1, 1) से गुजरने वाला एक वृत्त होगा यदि –
(1) p के एक मान के अलावा सभी मानों के लिए
(2) p के दो मानों के अलावा सभी मानों के लिए
(3) p के ठीक एक मान के लिए
(4) p के सभी मानों के लिए

2. The circle $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$ intersects the line $3x - 4y = m$ at two distinct points if
[AIEEE 2010, (4, –1), 144]

वृत्त $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$ रेखा $3x - 4y = m$ को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगा यदि
(1*) $-35 < m < 15$
(2) $15 < m < 65$
(3) $35 < m < 85$
(4) $-85 < m < -35$

Ans. **(1)**

3. The two circles $x^2 + y^2 = ax$ and $x^2 + y^2 = c^2 (c > 0)$ touch each other if :
[AIEEE-2011, I, (4, –1), 120]

दो वृत्त $x^2 + y^2 = ax$ तथा $x^2 + y^2 = c^2 (c > 0)$ स्पर्श करते हैं यदि
(1) $2|a| = c$
(2*) $|a| = c$
(3) $a = 2c$
(4) $|a| = 2c$

4. The equation of the circle passing through the point (1, 0) and (0, 1) and having the smallest radius is -
उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दुओं (1, 0) तथा (0, 1) से होकर जाता है तथा जिसकी त्रिज्या न्यूनतम है, है :
(1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
(2*) $x^2 + y^2 - x - y = 0$ **[AIEEE-2011, II, (4, –1), 120]**
(3) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$
(4) $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$

5. The length of the diameter of the circle which touches the x-axis at the point (1, 0) and passes through the point (2, 3) is :
[AIEEE- 2012, (4, –1), 120]

एक वृत्त जो x-अक्ष को बिंदु (1, 0) पर स्पर्श करता है तथा बिंदु (2, 3) से होकर जाता है, के व्यास की लंबाई है :
(1*) $\frac{10}{3}$
(2) $\frac{3}{5}$
(3) $\frac{6}{5}$
(4) $\frac{5}{3}$

6. The circle passing through (1, –2) and touching the axis of x at (3, 0) also passes through the point **[AIEEE - 2013, (4, –1),120]**

एक वृत्त जो (1, –2) से होकर जाता है, तथा x-अक्ष को (3, 0) पर स्पर्श करता है, जिस अन्य बिन्दु से होकर जाता है, वह है– **[AIEEE - 2013, (4, –1),120]**

(1) (–5, 2) (2) (2, – 5) (3*) (5, – 2) (4) (–2, 5)

7. Let C be the circle with centre at (1, 1) and radius = 1. If T is the circle centred at (0, y), passing through origin and touching the circle C externally, then the radius of T is equal to : **[Circle]**

माना C एक वृत्त है जिसका केंद्र (1, 1) पर है तथा त्रिज्या = 1 है। यदि T केंद्र (0, y) वाला वृत्त हैं जो मूल बिन्दु से हो कर जाता है तथा वृत्त C को बाह्य रूप से स्पर्श करता है तो T की त्रिज्या बराबर है : **[Circle]**

(Revision Planner) [JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]

(1) $\frac{1}{2}$ (2*) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Locus of the image of the point (2, 3) in the line $(2x - 3y + 4) + k(x - 2y + 3) = 0$, $k \in R$, is a **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) straight line parallel to x-axis (2) straight line parallel to y-axis

(3) circle of radius $\sqrt{2}$ (4) circle of radius $\sqrt{3}$ **[Circle]**

बिन्दु (2, 3) के रेखा $(2x - 3y + 4) + k(x - 2y + 3) = 0$, $k \in R$ में प्रतिबिम्ब का बिन्दुपथ एक – **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) x-अक्ष के समान्तर रेखा है। (2) y-अक्ष के समान्तर रेखा है।

(3) $\sqrt{2}$ त्रिज्या का वृत्त है। (4) $\sqrt{3}$ त्रिज्या का वृत्त है।

Ans. **(3)**

9. The number of common tangents to the circles $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$, is **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 1 (2) 2 (3*) 3 (4) 4

वृत्तों $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 6x + 18y + 26 = 0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है– **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 1 (2) 2 (3*) 3 (4) 4

Ans. **(3)**

10. The centres of those circles which touch the circle, $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$, externally and also touch the x-axis, lie on : **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

(1) an ellipse which is not a circle (2) a hyperbola

(3) a parabola (4) a circle

उन वृत्तों के केन्द्र, जो वृत्त $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$, को बाह्या रूप से स्पर्श करते हैं तथा x-अक्ष को भी स्पर्श करते है, स्थित हैं :

(1) एक दीर्घवत्त पर जो वृत्त नही है। (2) एक अतिपरवलय पर।

(3) एक परवलय पर। (4) एक वृत्त पर।

Ans. **(3)**

11. If one of the diameters of the circle, given by the equation, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, is a chord of a circle S, whose centre is at (– 3, 2), then the radius of S is : **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

यदि समीकरण, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ द्वारा प्रदत्त एक वृत्त का एक व्यास एक अन्य वृत्त S, जिसका केन्द्र (– 3, 2) है, की जीवा है, तो वृत्त S की त्रिज्या है :

(1) $5\sqrt{3}$ (2) 5 (3) 10 (4) $5\sqrt{2}$

Ans. **(1)**

12. Let the orthocenter and centroid of a triangle be A (–3, 5) and B(3,3) respectively. If C is the circumcentre of this triangle, then the radius of the circle having line segement AC as diameter , is :
[JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]

माना एक त्रिभुज का लम्ब केन्द्र तथा केन्द्रक क्रमशः A (–3, 5) तथा B(3,3) है। यदि इस त्रिभुज का परिकेन्द्र C है, तो रेखाखण्ड AC को व्यास मान कर बनाए जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है :

(1*) $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ (2) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10}$

13. Three circles of radii, a, b, c (a < b < c) touch each other externally, If they have x-axis as a common tangent, then : **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) a, b, c are in A.P. (2) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$

(3) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ are in A.P. (4) $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$

a, b, c (a < b < c) त्रिज्याओं वाले तीन वृत्त परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि x-अक्ष उनकी एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है, तो :

(1) a, b, c एक समांतर श्रेढ़ी में है। (2) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$

(3) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ एक समांतर श्रेढ़ी में है। (4) $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$

Ans. **(2)**

14. If a circle C passing through the point (4,0) touches the circle $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ externally at the point (1, –1), then the radius of C is: **[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

एक वृत्त C, बिंदु (4,0) से होकर जाता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ को बिंदु (1, –1) पर बाह्य स्पर्श करता है, तो C की त्रिज्या है:

(1) $2\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{57}$ (3) 4 (4) 5

Ans. **(4)**

15. If a variable line, $3x + 4y - \lambda = 0$ is such that the two circles $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ and $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 78 = 0$ are on its opposite sides, then the set of all values of λ is the interval:

यदि एक चर रेखा $3x + 4y - \lambda = 0$ इस प्रकार है कि दो वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 78 = 0$ इसके दोनों ओर (opposite sides) है, तो λ के सभी मानों का समुच्चय निम्न में से कौनसा अन्तराल है– **[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) (2, 17) (2) [12, 21] (3) [13, 23] (4) (23,31)

Ans. **(2)**

16. If a circle of radius R passes through the origin O and intersects the coordinate axes at A and B, then the locus of the foot of perpendicular from O on AB is -

यदि R त्रिज्या का एक वृत्त मूल बिन्दु O से होकर जाता है तथा निर्देशांक अक्षों को A और B पर काटता है, तो O से रेखा AB पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है–**[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) $(x^2 + y^2)(x + y) = R^2xy$ (2) $(x^2 + y^2)^3 = 4R^2x^2y^2$

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 4Rx^2y^2$ (4) $(x^2 + y^2)^2 = 4R^2x^2y^2$

Ans. **(2)**

High Level Problems (HLP)

✍ **Marked Questions may have for Revision Questions.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

SUBJECTIVE QUESTIONS

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. Find the equation of the circle passing through the points A(4, 3), B(2, 5) and touching the axis of y. Also find the point P on the y–axis such that the angle APB has largest magnitude.
बिन्दुओं A (4, 3) तथा B (2, 5) से गुजरने वाले तथा y-अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। y–अक्ष पर बिन्दु P ज्ञात कीजिए ताकि कोण APB महत्तम परिमाण का हो।

Ans. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ OR $x^2 + y^2 - 20x - 22y + 121 = 0$, P(0, 3), $\theta = 45°$

2. Let a circle be given by $2x(x - a) + y(2y - b) = 0$, $(a \neq 0, b \neq 0)$. Find the condition on a & b if two chords, each bisected by the x–axis, can be drawn to the circle from $\left(a, \frac{b}{2}\right)$

मानाकि वृत्त का समीकरण $2x(x - a) + y(2y - b) = 0$, $(a \neq 0, b \neq 0)$ है यदि बिन्दु $\left(a, \frac{b}{2}\right)$ से वृत्त पर दो जीवाएँ खींची जाए जो x–अक्ष द्वारा समद्विभाजित होती हो, तो a एवं b पर प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

Ans. $(a^2 > 2b^2)$

3. A circle is described to pass through the origin and to touch the lines $x = 1$, $x + y = 2$. Prove that the radius of the circle is a root of the equation $\left(3 - 2\sqrt{2}\right) t^2 - 2\sqrt{2}\, t + 2 = 0$.
एक वृत्त जो कि मूल बिन्दु से गुजरता है तथा रेखाओं $x = 1$ एवं $x + y = 2$ को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\left(3 - 2\sqrt{2}\right) t^2 - 2\sqrt{2}\, t + 2 = 0$ का एक मूल वृत्त की त्रिज्या है।

4. If (a, α) lies inside the circle $x^2 + y^2 = 9$: $x^2 - 4x - a^2 = 0$ has exactly one root in $(-1, 0)$, then find the area of the region in which (a, α) lies.
यदि (a, α) वृत्त के अन्दर स्थित है। $x^2 + y^2 = 9$: $x^2 - 4x - a^2 = 0$ का ठीक एक मूल $(-1, 0)$ में स्थित है तब क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें (a, α) स्थित है

Ans. $4\left\{\sqrt{5} + \frac{9}{2}\cot^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

5. Let $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ be a given circle. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from the origin upon any chord of S which subtends right angle at the origin.
माना $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ दिया गया वृत्त है। S की किसी जीवा जो मूल बिन्दू पर समकोण बनाती है, पर मूल बिन्दू से डाले गए लम्ब के लम्बपाद का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + y^2 + gx + fy + \frac{c}{2} = 0$

6. A ball moving around the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ in anti–clockwise direction leaves it tangentially at the point P(–2, –2). After getting reflected from a straight line it passes through the centre of the circle. Find the equation of this straight line if its perpendicular distance from P is $\frac{5}{2}$. You can assume that the angle of incidence is equal to the angle of reflection.
वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ के अनुदिश एक गेंद वामावर्त दिशा में गमन करती है तथा इसकी स्पर्श रेखा जो बिन्दु P(–2, –2) पर है, एक सरल रेखा पर परावर्तित होने के बाद वृत्त के केन्द्र से गुजरती है। सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसकी P से लम्बवत् दूरी $\frac{5}{2}$ हो। आप मान सकते है कि रेखा का झुकाव परावर्तन कोण के बराबर है।

Ans. $(4\sqrt{3} - 3)x - (4 + 3\sqrt{3})y - (39 - 2\sqrt{3}) = 0$

7. The lines $5x + 12y - 10 = 0$ and $5x - 12y - 40 = 0$ touch a circle C_1 of diameter 6 unit. If the centre of C_1 lies in the first quadrant, find the equation of the circle C_2 which is concentric with C_1 and cuts of intercepts of length 8 on these lines.
रेखाऐं $5x + 12y - 10 = 0$ तथा $5x - 12y - 40 = 0$ एक 6 इकाई व्यास वाले वृत्त C_1 को स्पर्श करती है। यदि C_1 का केन्द्र प्रथम चर्तुथांश में स्थित है तब वृत्त C_2 का समीकरण ज्ञात करो जो C_1 का संकेन्द्रीय है तथा जो इन रेखाओं पर 8 लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है।
Ans. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$

8. The chord of contact of tangents drawn from a point on the circle $x^2 + y^2 = a^2$ to the circle $x^2 + y^2 = b^2$ touches the circle $x^2 + y^2 = c^2$. Show that a, b, c are in G.P.
वृत $x^2 + y^2 = a^2$ के एक बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 = b^2$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्शी जीवा, वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ को स्पर्श करती है। प्रदर्शित कीजिए कि a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

9. Find the locus of the middle points of chords of a given circle $x^2 + y^2 = a^2$ which subtend a right angle at the fixed point (p, q).
वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि एक नियत बिन्दु (p, q) पर समकोण अन्तरित करता है।
Ans. $2x^2 + 2y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0$

10. Let $a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0$, where a, b, d are fixed real numbers such that $a + b = d^2$. If the line $\ell x + my + 1 = 0$ touches a fixed circle then find the equation of circle
माना $a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0$ जबकि a, b, d निश्चित वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि $a + b = d^2$, यदि रेखा $\ell x + my + 1 = 0$ एक निश्चित वृत्त को स्पर्श करती है तो वृत्त का समीकरण होगा –
Ans. $x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - b = 0$

11. The centre of the circle S = 0 lies on the line $2x - 2y + 9 = 0$ and S = 0 cuts orthogonally the circle $x^2 + y^2 = 4$. Show that circle S = 0 passes through two fixed points and also find their co–ordinates.
वृत्त S = 0 का केन्द्र $2x - 2y + 9 = 0$ पर स्थित है तथा वृत्त S = 0 वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ को लम्बकोणीय काटता है। दशाईये कि वृत्त S = 0 दो नियत बिन्दुओं से गुजरता है तथा उनके निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
Ans. $(-4, 4); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

12. Prove that the two circles which pass through the points (0, a), (0, – a) and touch the straight line $y = mx + c$ will cut orthogonaly if $c^2 = a^2(2 + m^2)$.
सिद्ध कीजिए कि दो वृत्त जो बिन्दु (0, a), (0, – a) से गुजरते है तथा सरल रेखा $y = mx + c$ को स्पर्श करते है, परस्पर लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते है यदि $c^2 = a^2(2 + m^2)$ हो।

13. Consider points A $(\sqrt{13}, 0)$ and B $(2\sqrt{13}, 0)$ lying on x-axis. These points are rotated in an-anticlockwise direction about the origin through an angle of $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. Let the new position of A and B be A′ and B′ respectively. With A′ as centre and radius $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ a circle C_1 is drawn and with B′ as a centre and radius $\frac{\sqrt{13}}{3}$ circle C_2 is drawn. Find radical axis of C_1 and C_2.
माना x-अक्ष पर स्थित बिन्दु $A(\sqrt{13}, 0)$ एवं बिन्दु B $(2\sqrt{13}, 0)$ है। इन बिन्दुओं को मूल बिन्दु के सापेक्ष दक्षिणावृत्त दिशा में $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ कोण से घुमाया जाता है। माना कि A व B बिन्दुओं की नयी स्थिति A′ व B′ होगी। A′ को केन्द्र तथा

$\frac{2\sqrt{13}}{3}$ त्रिज्या लेकर एक वृत्त C_1 बनाया जाता है तथा B′ को केन्द्र लेकर $\frac{\sqrt{13}}{3}$ एवं त्रिज्या लेकर वृत्त C_2 बनाया जाता है। C_1 व C_2 का मूलाक्ष होगा–

Ans. $9x + 6y = 65$

14. P(a, b) is a point in the first quadrant. If the two circles which pass through P and touch both the co–ordinate axes cut at right angles, then find condition in a and b.

प्रथम चतुर्थांश में एक बिन्दु P(a, b) है। यदि दो वृत्त जो P से गुजरते है तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करते हो तथा एक दूसरे को समकोणीय काटते हो, तो–

Ans. $a^2 - 4ab + b^2 = 0$

15. Prove that the square of the tangent that can be drawn from any point on one circle to another circle is equal to twice the product of perpendicular distance of the point from the radical axis of two circles and distance between their centres.

सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के किसी बिन्दु से दूसरे वृत्त पर खीचीं जाने वाली स्पर्श रेखा का वर्ग, दोनों वृत्तो की मूलाक्ष से बिन्दु की लम्बवत् दूरी और उनके केन्द्रों के मध्य दूरी के गुणनफल के दुगुने के बराबर है

16. Find the equation of the circle which cuts each of the circles, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$ & $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ at the extremities of a diameter.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$ और $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ को उनके व्यासों के अन्तिम सिरों पर काटता हो।

Ans. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$

17. Show that if one of the circle $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ and $x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0$ lies within the other, then gg_1 and c are both positive.

प्रदर्शित कीजिए कि वृत्तों $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0$ में एक वृत्त दूसरे के अन्दर स्थित हो, तो gg_1 एवं c दोनों धनात्मक है।

18. Let ABCD is a rectangle. Incircle of ΔABD touches BD at E. Incircle of ΔCBD toches BD at F. If AB = 8 units, and BC = 6 units, then find length of EF.

माना ABCD एक आयत है। ΔABD का अन्तवृत्तः BD को E पर स्पर्श करता है। ΔCBD का अन्तवृत्त BD को F पर स्पर्श करता है। यदि AB = 8 तथा BC = 6 तब EF की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. **2**

19. Let circles S_1 and S_2 of radii r_1 and r_2 respectively ($r_1 > r_2$) touches each other externally. Circle S radii r touches S_1 and S_2 externally and also their direct common tangent. Prove that the triangle formed by joining centre of S_1, S_2 and S is obtuse angled triangle.

माना S_1 और S_2 क्रमश r_1 और r_2 ($r_1 > r_2$) त्रिज्या के वृत्त है प्रत्येक एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते है S_1 तथा S_2 बाह्य तथा उनकी अनुस्पर्श उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को स्पर्श करने वाला r त्रिज्या का वृत्त S है। तब सिद्ध कीजिए की S_1, S_2 तथा S के केन्द्रों को मिलाने से बना त्रिभुज अधिककोण त्रिभुज है।

20. Circles are drawn passing through the origin O to intersect the coordinate axes at point P and Q such that m. OP + n . OQ is a constant. Show that the circles pass through a fixed point.

मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त खींचे जाते है जो निर्देशांक अक्ष को P और Q को इसप्रकार प्रतिच्छेदन करते है कि m, OP + n . OQ अचर है। दर्शाइये कि वृत्त एक स्थिर बिन्दु से गुजरते है।

21. A triangle has two of its sides along the axes, its third side touches the circle $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$. Find the equation of the locus of the circumcentre of the triangle.

एक त्रिभुज की दो भुजाये अक्षों के अनुदिश है तथा तीसरी भुजा वृत्त $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ को स्पर्श करती है। त्रिभुज के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $2(x + y) - a = \frac{2xy}{a}$

22. Let S_1 be a circle passing through A(0, 1), B(–2, 2) and S_2 is a circle of radius $\sqrt{10}$ units such that AB is common chord of S_1 and S_2. Find the equation of S_2.

माना S_1 वृत्त है जो A(0, 1), B(–2, 2) बिन्दुओं से गुजरता है तथा S_2 , $\sqrt{10}$ त्रिज्या का एक वृत्त इस प्रकार है कि AB, S_1 और S_2 की उभयनिष्ठ जीवा है, तो S_2 का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 \pm \sqrt{7}\ (x + 2y - 2) = 0$

23. The curves whose equations are

$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

intersect in four concyclic points then find relation in a, b, h, a′, b′, h′.

समीकरणों

$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

से प्रदर्शित वक्र परस्पर चार समचक्रीय बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते है, तो a, b, h, a′, b′, h′ में संबन्ध ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{a-b}{h} = \frac{a'-b'}{h'}$

24. A circle of constant radius ‘r’ passes through origin O and cuts the axes of coordinates in points P and Q, then find the equation of the locus of the foot of perpendicular from O to PQ.

एक निश्चित त्रिज्या r का एक वृत्त मूल बिन्दु O से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को P व Q पर काटता हो, तो O से PQ पर डाले गये लम्ब पाद का बिन्दुपथ है –

Ans. $(x^2 + y^2)^2 (x^{-2} + y^{-2}) = 4r^2$

25. The ends A , B of a fixed straight line of length ‘a’ and ends A′ and B′ of another fixed straight line of length ‘b’ slide upon the axis of X & the axis of Y (one end on axis of X & the other on axis of Y). Find the locus of the centre of the circle passing through A, B, A′ and B′.

a लम्बाई का नियत रेखाखण्ड के सिरे A एवं B तथा b लम्बाई का अन्य नियत रेखाखण्ड के सिरे A′ एवं B′ है, X-अक्ष व Y-अक्ष पर फिसलते है। (एक सिरा X-अक्ष पर व दूसरा सिरा Y-अक्ष पर). A, B, A′ एवं B′ से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans. $(2ax - 2by)^2 + (2bx - 2ay)^2 = (a^2 - b^2)^2$